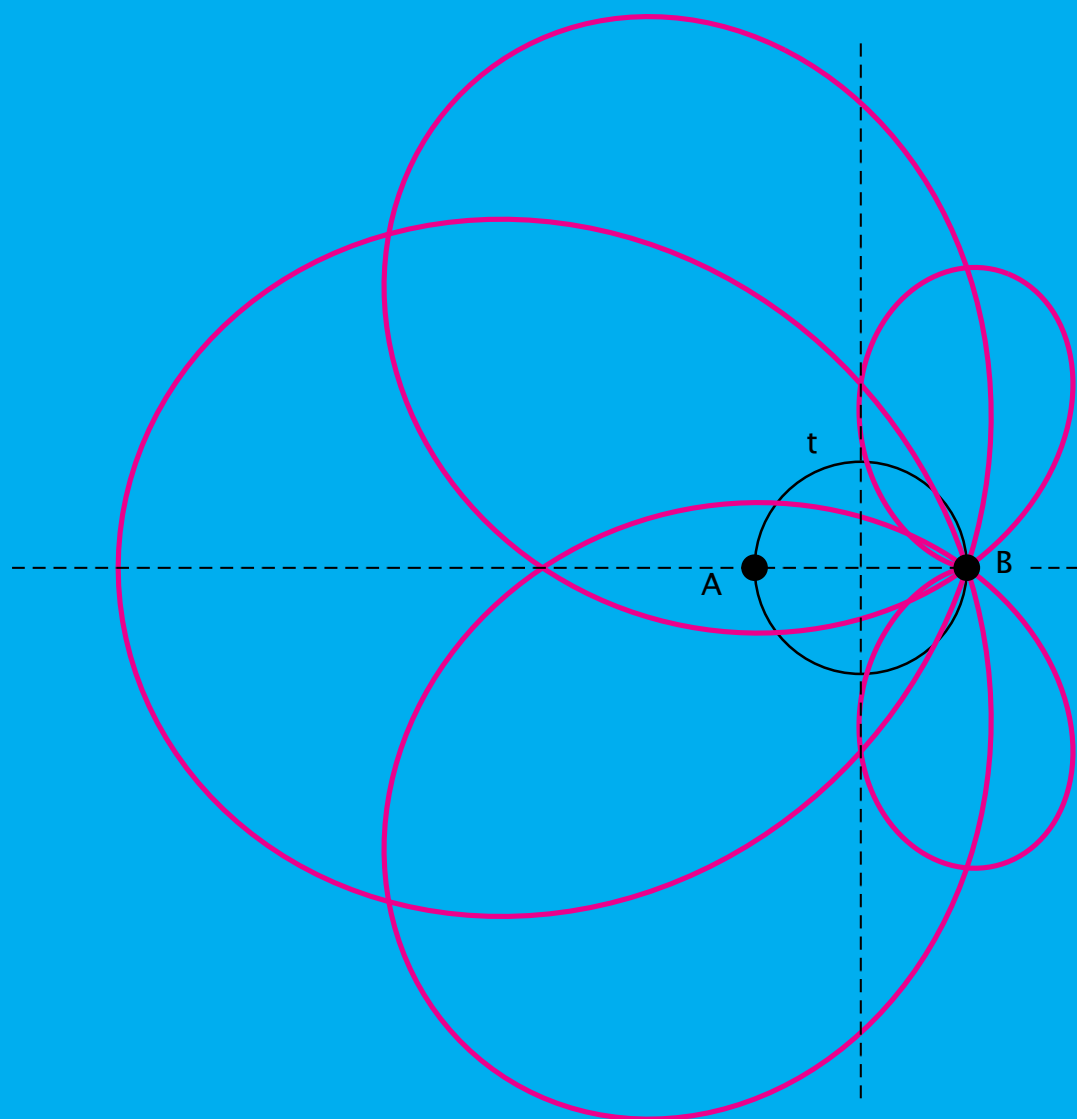


V S M P
S S P M P
S S I M F

Bulletin

Mai 2021 — Mai 2021 — Maggio 2021

N° 146



V S M P
S S P M P
S S I M F

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e di Fisica

Internet-Adressen — *Adresses Internet*
www.vsmf.ch — www.sspmp.ch — www.ssimf.ch

Titelseite — *Page de Titre*
Blumenkurve. Artikel auf Seite 8 in dieser Ausgabe

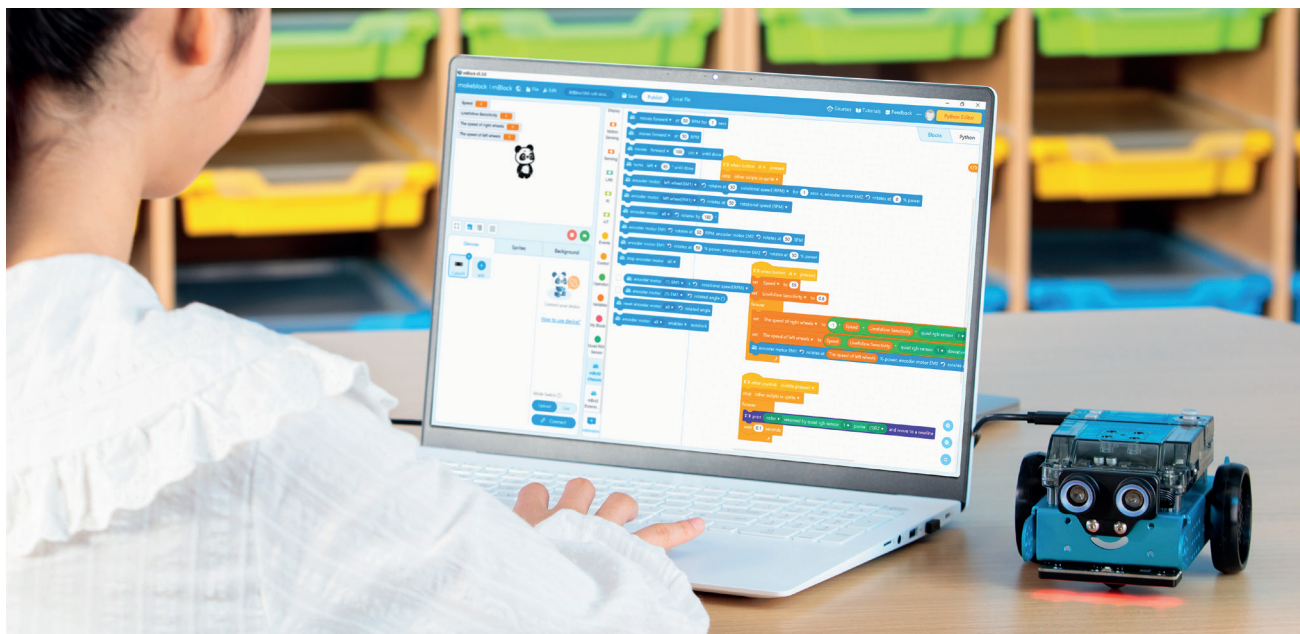
In dieser Ausgabe — Dans ce numéro

Deutschschweizerische Physikkommission	4
Martin Lieberherr Hyperbolischer Kepler	4
Deutschschweizerische Mathematikkommission	8
Bruno Capelli Von der Kronenfunktion zu der Blumenkurve	8
Monika Krichel Ist das Universum ein riesiger Donut?	13
Peter Gallin Anzahl Gitterwege ohne und mit Diagonalen oder Die Delannoy-Zahl	14
Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht	17
Lara Gafner Goldene Leistungen an der Schweizer Mathematik-Olympiade	18
Lara Gafner Grosser Erfolg für die Schweiz an Französischsprachiger Mathematik-Olympiade	19
Schweizerischer Tag über Mathematik und Unterricht	20
Kevin Inderbitzin <i>Book Review: Mathematical Imagining: a Routine for Secondary Classrooms</i>	22
<i>DMK-Lehrmittel: Geometry 2</i>	23
Commission Romande de Mathématique	24
Didier Müller Le logogriphe d'Euler	24
Alexandre Junod La loi de réciprocité quadratique	28
<i>Colloque: Géométries d'hier et d'aujourd'hui</i>	31

DIE NEUEN MAKEBLOCK PRODUKTE JETZT BEI EDUCATEC BESTELLEN

educatec.ch/mbot2

Der neue, netzwerkfähige Roboter zur Vermittlung von Programmier-, Robotik und MINT-Kenntnissen



mBot2 ist ein Lernroboter der nächsten Generation, der als Einstiegslösung für die Sekundarstufe konzipiert worden ist. Mit mBot2 lassen sich reale Anwendungen auf modernsten Technologie-Standards - einschliesslich **Robotik, KI, IoT und DataScience** - lehren und lernen. mBot2 wurde entwickelt, um Schülerinnen und Schülern einen interaktiven und intelligenten Unterricht zu ermöglichen, welcher fesselnd ist und Spass macht.

Mit der verbesserten Coding-Lernerfahrung von **mBlock** ermöglicht mBot2 Studenten und Pädagogen, mit dem blockbasierten Programmier-Ansatz zu beginnen und nahtlos in die objektorientierte, textbasierte Programmierung mit **Python** überzugehen - alles in derselben Umgebung.

weitere Informationen zu mBot2 finden Sie unter: educatec.ch/mbot2

Schweizer MakeX Robotics Wettbewerb 2021

MakeX ist eine globale Robotik-Wettbewerbsplattform, die multidisziplinäres Lernen in den Bereichen Wissenschaft und Technologie fördert. Seit 2017 hat MakeX über 60.000 Schüler inspiriert, eine Leidenschaft für **Wissenschaft, Mathematik, Informatik, Naturwissenschaft, Technik (MINT)** zu entwickeln und ihr Wissen auf reale Probleme anzuwenden. Die diesjährige Saison findet ab November 2021 an regionalen Wettkämpfen in Zürich, Basel, Genf und Vernier in verschiedenen Altersklassen statt, in denen die Teams ihre Fähigkeiten in den Bereichen Problemlösung, Block-Coding und Engineering unter Beweis stellen können.

Weitere Info, Anmeldung und Kurse über den Wettbewerb finden Sie unter: makexch.persona.co/



makeblock
education

Sind Sie Lehrer/In und möchten mBot2 drei Wochen lang unverbindlich in Ihrem Klassenzimmer testen? Dann nutzen Sie die Gelegenheit und fordern Sie über den **QR-Code kostenlos** ein Produktdemo an.

EducaTec AG

Altes Schulhaus, Kanzleigasse 2
Postfach, 5312 Döttingen

T +41 56 245 81 61, F +41 56 245 81 63
contact@educatec.ch, www.educatec.ch

educatec

Hyperbolischer Kepler

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

1 Einleitung

Die keplerschen Gesetze sind ein Kulturgut ersten Ranges. Während Kopernikus “lediglich” das heliozentrische Weltbild des Aristarch von Samos wieder aufgewärmt und erweitert hat, zerstörte Kepler das alte Dogma der Kreisbewegung von Himmelskörpern. Newton hat in den “Principia” aus den ersten zwei keplerschen Gesetzen die $1/r^2$ -Abhängigkeit der Gravitationskraft hergeleitet (1687)¹. Heute wird die Rechnung meistens in der umgekehrten Richtung präsentiert: Mit Hilfe des dritten keplerschen Gesetzes wird das Gravitationsgesetz für Kreisbahnen motiviert. Anschliessend wird bewiesen, dass Kegelschnittbahnen aus dem Kraftgesetz folgen.² Das ist seltsam indirekt. Ich möchte im Folgenden zeigen, wie aus den ersten zwei Gesetzen das dritte keplersche Gesetz und das newtonsche Gravitationsgesetz direkt hergeleitet respektive motiviert werden können.

Damit nicht nur Altbekanntes³ frisch verpackt wird, übertrage ich die keplerschen Gesetze von elliptischen auf hyperbolische Bahnen. Was wird dabei aus dem dritten Gesetz? Wie werden die Eigenschaften der Hyperbel aus den physischen Bewegungsdaten bestimmt?

2 Hyperbeln

Die Hyperbel ist ein Kegelschnitt, siehe Abbildung 1. In einer Formelsammlung⁴ findet man:

Kartesische Koordinaten	Polarkoordinaten	(1)
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$	(2)
a Abstand Zentrum-Hauptscheitel	$p = b^2/a$ Parameter, (halbes) Quermass	(3)
c Abstand Zentrum-Brennpunkt	$\varepsilon = c/a > 1$ (numerische) Exzentrizität	(4)
$c^2 = a^2 + b^2$	$p = (\varepsilon^2 - 1) \cdot a$	(5)

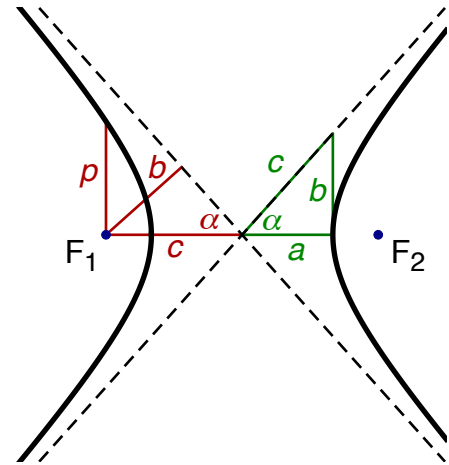
Damit lassen sich die ersten zwei keplerschen Gesetze z.B. folgendermassen schreiben:

1. Meteoritenbahnen sind Hyperbeln, in deren einem Brennpunkt die Erde steht.
2. Die Verbindungslinie Erde-Meteorit überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Es versteht sich von selbst, dass vom Luftwiderstand abgesehen wird. Ein Meteorit ist ja eigentlich ein kosmischer Kleinkörper, der in die Atmosphäre eingedrungen ist und dort einen Meteor (Leuchterscheinung, e.g. eine Sternschnuppe) produziert. Vor dem Eintritt in die Atmosphäre wird der Meteorit “Meteoroid” genannt. Statt des Meteoriten könnte man auch eine Raumsonde betrachten, die an einem anderen Himmelskörper ein swing-by Manöver durchführt. Im Fokus der Hyperbel befindet sich natürlich der Schwerpunkt der Erde respektive des betrachteten Zentralkörpers.

Abbildung 1: Hyperbel mit Exzentrizität $\varepsilon = 3/2$ und Parameter $p = 1$ (willkür. Einheiten). Mit diesen Zahlen ist der Abstand der Scheitel $2a = 8/5$, der Abstand der Brennpunkte $2c = 12/5$ und der Steigungswinkel der Asymptoten 48.19° .

Die Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte P, deren Abstandsdifferenz zu den zwei Brennpunkten F_1 und F_2 konstant ist: $|F_1P - F_2P| = 2a$. Die Hyperbel hat zwei bezüglich des Zentrums punktsymmetrische Äste. Sie hat zwei Geraden mit Steigung $\tan \alpha = \pm b/a$ respektive $\cos \alpha = 1/\varepsilon$ als Asymptoten. Die Brennpunkte haben Abstand b von diesen Asymptoten. Man nennt a auch reelle Halbachse, b imaginäre Halbachse und c lineare Exzentrizität. Der Parameter p ist gleich der Bahnkrümmung im Scheitel der Hyperbel.

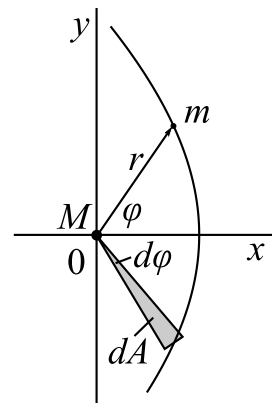


3 Flächensatz

Abbildung 2 illustriert den Flächensatz und führt Koordinaten ein. Wir werden den Flächensatz später verwenden, um die Zeitabhängigkeit des Kraftgesetzes zu eliminieren.

Abbildung 2: Die Position des Meteoriten (Testmasse m) kann in Polarkoordinaten (r, φ) oder kartesischen Koordinaten (x, y) dargestellt werden. Im Ursprung des Koordinatensystems befinden sich der eine Brennpunkt und der Zentralkörper (Masse M).

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad dA = \frac{1}{2} r \cdot r d\varphi = \frac{1}{2} r^2 d\varphi \quad (6)$$



Die von der Verbindungslinie überstrichene Fläche kann als Kreissektor mit Radius r und Zentriwinkel $d\varphi$ angenähert werden. Für infinitesimal kleine Winkel wird diese Näherung exakt. (Die überstehende Ecke des Sektors in Abb. 2 wird gleich gross wie die fehlende Ecke.) Der Flächensatz lautet damit

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{d\varphi}{dt} \rightarrow \ell = r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{const} \quad (7)$$

Die zur späteren Verwendung eingeführte Abkürzung $\ell = L/m$ ist der spezifische Bahndrehimpuls des Meteoriten (Betrag). Aus dem Flächensatz folgt ausserdem, dass die Beschleunigung radial gerichtet ist, denn

$$2 \frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{v} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad 2 \frac{d^2\vec{A}}{dt^2} = \vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a} = \vec{r} \times \vec{a} = \vec{0} \quad (8)$$

Das Vektorprodukt $\vec{r} \times \vec{a}$ verschwindet nur, falls die Beschleunigung \vec{a} parallel zu \vec{r} ist (in der Regel sind ja sowohl \vec{r} als auch \vec{a} verschieden von Null). Diese Überlegung stammt von Newton, natürlich noch ohne Vektoren und Ableitungen formuliert.

4 Herleitung des Gravitationsgesetzes

Wie berechnen aus der Bahngleichung eines Kegelschnitts mit Hilfe des Flächensatzes die Beschleunigung, dann motivieren wir mit Hilfe der newtonschen Axiome das Kraftgesetz.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{p \cdot \varepsilon \sin \varphi \cdot d\varphi/dt}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} + \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \quad (10)$$

$$\vec{v} = \frac{p}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon \sin \varphi \cos \varphi - \sin \varphi - \varepsilon \cos \varphi \sin \varphi \\ \varepsilon \sin^2 \varphi + \cos \varphi + \varepsilon \cos^2 \varphi \end{pmatrix} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \quad (11)$$

$$\vec{v} = \frac{r^2}{p} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi + \varepsilon \end{pmatrix} \cdot \frac{\ell}{r^2} = \frac{\ell}{p} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi + \varepsilon \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\ell}{p} \cdot \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\ell}{p} \cdot \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \frac{\ell}{r^2} = -\frac{1}{r^3} \cdot \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \frac{\ell^2}{p} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \frac{\ell^2}{p} \quad (13)$$

Damit ist die Hauptarbeit gemacht: Die Beschleunigung ist umgekehrt proportional zum Abstand im Quadrat. Sie ist zum Nullpunkt des Koordinatensystems, also zum Brennpunkt des Kegelschnitts gerichtet. Zusammen mit dem zweiten newtonschen Axiom folgt für die Gravitationskraft:

$$\vec{F}_{\text{res}} = m\vec{a} \rightarrow \vec{F}_G = -\frac{\ell^2}{p} \cdot \frac{m}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (14)$$

Es scheint zunächst so, als ob die Proportionalitätskonstante ℓ^2/p für jede Bahn eine andere wäre. Dem ist aber nicht so. Wenn sich zwei Bahnen mit unterschiedlichen spezifischen Drehimpulsen ℓ und Parametern p kreuzen, muss die Beschleunigung am Kreuzungspunkt dieselbe sein. Das Verhältnis ℓ^2/p ist eine Konstante, welche durch den Zentralkörper mitbestimmt wird.

Das dritte newtonsche Axiom legt nahe, dass die Gravitationskraft symmetrisch bezüglich der Massen ist:

$$\vec{F}_G = -\frac{\ell^2}{Mp} \cdot \frac{Mm}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \stackrel{\text{Def}}{=} -G \cdot \frac{Mm}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{mit} \quad G = \frac{\ell^2}{Mp} \quad (15)$$

Die Gravitationskonstante G muss im Labor gemessen werden. Hingegen ist der so genannte Gravitationsparameter $\mu = GM = \ell^2/p$ nur durch die Bewegung des Meteoriten bestimmt. Die Gravitationsparameter einiger Himmelskörper im Sonnensystem sind tabelliert⁴ und viel genauer bekannt als die Gravitationskonstante.

Im Falle einer Ellipsenbahn kann aus $\ell^2 = \mu p$ das dritte keplersche Gesetz gewonnen werden.

$$\ell = 2 \cdot \frac{dA}{dt} = 2 \cdot \frac{\pi ab}{T} \Rightarrow \ell^2 = 4\pi^2 \frac{a^2 b^2}{T^2} = \mu p = \mu \frac{b^2}{a} \Rightarrow \frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu}{4\pi^2} \quad (\text{Kepler III}) \quad (16)$$

Im Falle einer Hyperbelbahn ist der spezifische Bahndrehimpuls $\ell = b v_\infty$, wobei v_∞ die Bahngeschwindigkeit im Unendlichen ist, der so genannte hyperbolische Exzess. Damit folgt aus $\ell^2 = \mu p$

$$\ell^2 = b^2 v_\infty^2 = \mu \frac{b^2}{a} \Rightarrow \mu = a v_\infty^2 \quad (17)$$

Der hyperbolische Exzess v_∞ bestimmt also die reelle Achse a der Hyperbelbahn um einen Zentralkörper mit Gravitationsparameter $\mu = GM$. Damit erhalten wir für die Gesamtenergie eines Meteoriten der Masse m :

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} m v_\infty^2 = \frac{\mu m}{2a} = \frac{GMm}{2a} \quad (18)$$

Das ist, bis auf das Vorzeichen, dieselbe Formel wie für eine Ellipsenbahn. Die Gesamtenergie bestimmt also die reelle Achse a der Hyperbelbahn. Die numerische Exzentrizität ε folgt aus dem spezifischen Drehimpuls ℓ :

$$\ell^2 = \mu p = \mu a (\varepsilon^2 - 1) \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{\ell^2}{\mu a}} \quad (19)$$

Eine ganz ähnliche Beziehung gilt auch für Ellipsenbahnen (mit anderen Vorzeichen).

5 Numerischer Test

Nach langen Rechnungen bin ich immer unsicher, zumal ich kaum etwas ohne Flüchtigkeitsfehler zu Papier bringe. Testen wir doch die Beziehungen, siehe Abbildung 3.

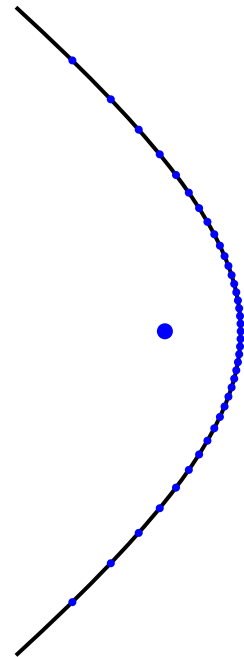
Abbildung 3: Simulation einer hyperbolischen Keplerbahn (Line) verglichen mit theoretisch berechneten Positionen (Punkte). Das newtonsche Gravitationsgesetz wurde mit dem Euler-Cromer Verfahren numerisch integriert. Start war im Perizentrum im Abstand r_P mit Geschwindigkeit v_P . Die Theorie liefert daraus die exakten Eigenschaften p und ε der Hyperbel.

$$\text{Start im Perizentrum: } r_P = 1 \quad v_P = 1.5 \quad (GM = 1) \quad (20)$$

$$\frac{GMm}{2a} = \frac{1}{2}mv_P^2 - \frac{GMm}{r_P} \Rightarrow a = 4 \quad (21)$$

$$\varepsilon = 1 + r_P/a = 1.25 \quad p = (\varepsilon^2 - 1) \cdot a = 2.25 \quad (22)$$

$$v_\infty = \sqrt{\mu/a} = 0.5 \quad \text{alles in willkürlichen Einheiten} \quad (23)$$



6 Schlusswort

Einen Teil dieser Rechnung, Gleichungen (6)-(7) und (9)-(13) habe ich mit Schülerinnen und Schülern im Ergänzungsfach Physik durchgeführt. Die meisten Schritte wurden gut verstanden, die Klassen haben jedenfalls alle meine Flüchtigkeitsfehler gefunden. Die grösste Schwierigkeit bot die innere Ableitung $d\varphi/dt$, welche in Gleichung (10) auftaucht. Dass sie nicht weiter ausgerechnet werden kann, ist ungewohnt.

Aus dem Steigungswinkel der Asymptoten liesse sich der Ablenkwinkel des Meteoriten oder der Raumsonde an einem Planeten berechnen. Für einen Meteoriten, der mit Lichtgeschwindigkeit am Sonnenrand vorbeifliegt, erhielte man die berühmten $0.875''$ Ablenkung des Johann Georg von Soldner⁵. Einstein erhielt für die Lichtablenkung am Sonnenrand das Doppelte. Die Rechnung liesse sich auch übertragen auf die Ablenkung eines Alphateilchens an einem Goldatomkern. Die Rutherford'sche Streuformel liegt in Griffweite. Und wer noch nicht genug hat, kann ja selber eine keplersche Parabelbahn durchrechnen.

¹ G. Markowsky, "A retelling of Newton's work on Kepler's Laws", *Expositiones Mathematicae* 29 (2011) 253–282

² Newton hat, gemäss mehrerer Autoren, die Herleitung der Ellipsenbahn aus dem Kraftgesetz nicht vollständig angegeben. Dies sei 1710 durch Johann Bernoulli nachgeholt worden. M. Nauenberg, "Newton's Principia and Inverse-Square Orbits", *The College Mathematics Journal*, Vol. 25, No. 3 (May, 1994), pp. 212-222 (und die Referenzen darin).

³ https://en.wikipedia.org/wiki/Binet_equation (Abruf am 15. Feb. 2021)
Jacques Philippe Marie Binet hat das Kraftgesetz für beliebige spiralförmige Bahnen hergeleitet.

⁴ DMK/DPK/DCK, "Formeln, Tabellen, Begriffe", Orell Füssli Verlag, Zürich, 7. Auflage, 2019

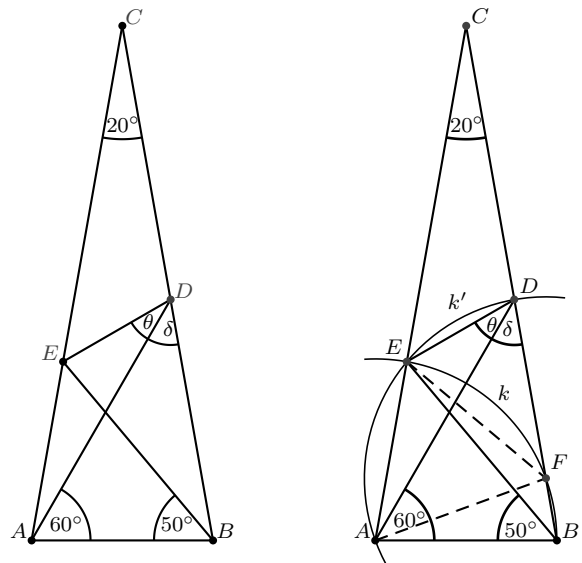
⁵ https://de.wikipedia.org/wiki/Johann_Georg_von_Soldner (Abruf am 17. Feb. 2021)

Von der Kronenfunktion zu der Blumenkurve

Bruno Cappelli, bruno.cappelli@kzo.ch

Die genaue Untersuchung einer geometrischen Aufgabe zur Berechnung eines berühmten 30° -Winkels führt zu einer kronenartigen Funktion mit Spitzen und einer symmetrischen Kurve in Form einer Blume.

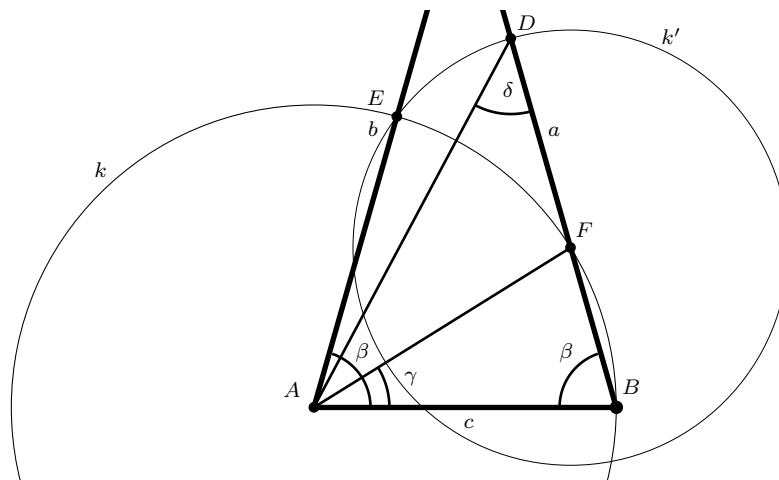
Die Aufgabe wurde schon im VSMP-Bulletin Nr. 67, 1995 von Peter Gallin in einem «Comix» thematisiert. Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit Scheitelwinkel $\gamma = 20^\circ$. Zwei Winkel von 60° bzw. 50° werden von der Basis aus bei A bzw. B eingetragen und ergeben die Punkte D bzw. E auf den beiden Schenkeln des Dreiecks. Man kann zeigen, dass der Winkel $\theta = \angle EDA = 30^\circ$. Zuerst wird der Punkt F auf dem Schenkel BC mit dem Kreis k (Radius AB und Zentrum A) konstruiert. Da der Winkel $EBA = 50^\circ$ und $BAE = 80^\circ$, muss das Dreieck ABE gleichschenkelig sein und der Punkt E liegt auf dem Kreis k . Das Dreieck AFE ist gleichseitig und das Dreieck FDA ist wegen $\delta = 40^\circ$ gleichschenkelig.



Also geht der Kreis k' (Radius FE und Zentrum F) durch D . Da das Dreieck FDE auch gleichschenkelig ist, sind alle Winkel eindeutig bestimmbar. (Siehe Originalcomix via QR-Code)



Gibt es noch andere Winkel γ , die eine so schön aufgehende Figur ergeben und wieso kommt man mit der Konstruktion des «Comix» genau auf D ? Also wieso beträgt δ genau 40° ? Um diese Fragen zu beantworten, verallgemeinern wir die Aufgabe wie folgt:

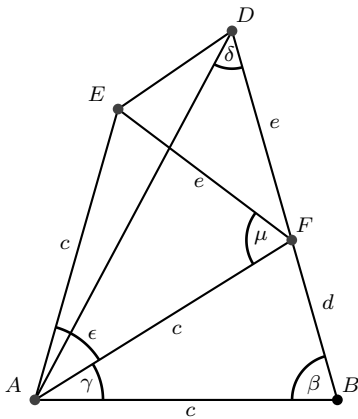


Wir starten mit der Basis $AB = c$ des Dreiecks und konstruieren den Kreis k mit Radius c und Zentrum A . Der Winkel β wird einmal bei A und dann bei B eingetragen. So finden wir die beiden

Schnittpunkte E und F auf dem Kreis k . Die Strecken AE und BF werden verlängert und ergeben die beiden Schenkel b und a des gleichschenkligen Dreiecks mit Basiswinkel β . Den Scheitelwinkel γ des Dreiecks finden wir auch bei BAF , und er lässt sich als Funktion von β angeben:

$$\gamma = \pi - 2\beta \quad (1)$$

Jetzt wird der Kreis k' mit Radius EF und Mittelpunkt F analog zum Verfahren im «Comix» konstruiert. Sei D der Schnittpunkt zwischen dem Kreis k' und dem Schenkel a .



Wir suchen dann einen algebraischen Ausdruck für den Winkel δ in Abhängigkeit von β , indem wir die Trigonometrie im Dreieck ABD anwenden. Aus dem Sinussatz folgt:

$$\frac{c}{\sin \delta} = \frac{AD}{\sin \beta}$$

Die Gleichung wird nach $\sin \delta$ aufgelöst:

$$\sin \delta = \frac{c}{AD} \sin \beta \quad (2)$$

Sei d die Strecke BF und e die Strecke FD .

Nach dem Cosinussatz folgt:

$$AD^2 = c^2 + (d + e)^2 - 2c(d + e) \cos \beta \quad (3)$$

Jetzt drücken wir die Strecken d und e in Abhängigkeit von c aus. Die Strecke d ist die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks mit Basiswinkel β bei B und F . Es folgt mit Trigonometrie:

$$d = 2c \cos \beta$$

Ähnlich lässt sich auch e ermitteln, weil die Dreiecke FDE und AFE gleichschenklilig sind und die gemeinsame Seite FE der Länge e besitzen. Im Dreieck AFE folgt also:

$$e = 2c \cos \mu$$

wobei μ der Basiswinkel im Dreieck AFE ist. Im Dreieck AFE finden wir eine Beziehung zwischen dem Scheitelwinkel ϵ und dem Basiswinkel μ :

$$\mu = \frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon}{2}$$

Da $\epsilon = \beta - \gamma$ und mit (1), folgt:

$$\mu = \frac{2\pi - 3\beta}{2} \quad (4)$$

Jetzt können wir die beiden Ausdrücke für d und e in (3) einsetzen:

$$\begin{aligned} AD^2 &= c^2 + 4c^2(\cos \beta + \cos \mu)^2 - 4c^2(\cos \beta + \cos \mu) \cos \beta \\ &= c^2 \cdot (1 + 4(\cos \beta + \cos \mu)^2 - 4(\cos \beta + \cos \mu) \cos \beta) \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren und Vereinfachen ergeben:

$$\begin{aligned} AD^2 &= c^2 \cdot (1 + 4 \cos^2 \mu + 4 \cos \mu \cos \beta) \\ &= c^2 \cdot (1 + 4 \cos \mu (\cos \mu + \cos \beta)) \end{aligned}$$

Mit der Gleichung (4) für μ gilt dann:

$$AD^2 = c^2 \cdot \left[1 + 4 \cos \left(\frac{2\pi - 3\beta}{2} \right) \left(\cos \left(\frac{2\pi - 3\beta}{2} \right) + \cos \beta \right) \right]$$

Mit dem Einsetzen in (2) bekommen wir folgende Formel für den Winkel δ :

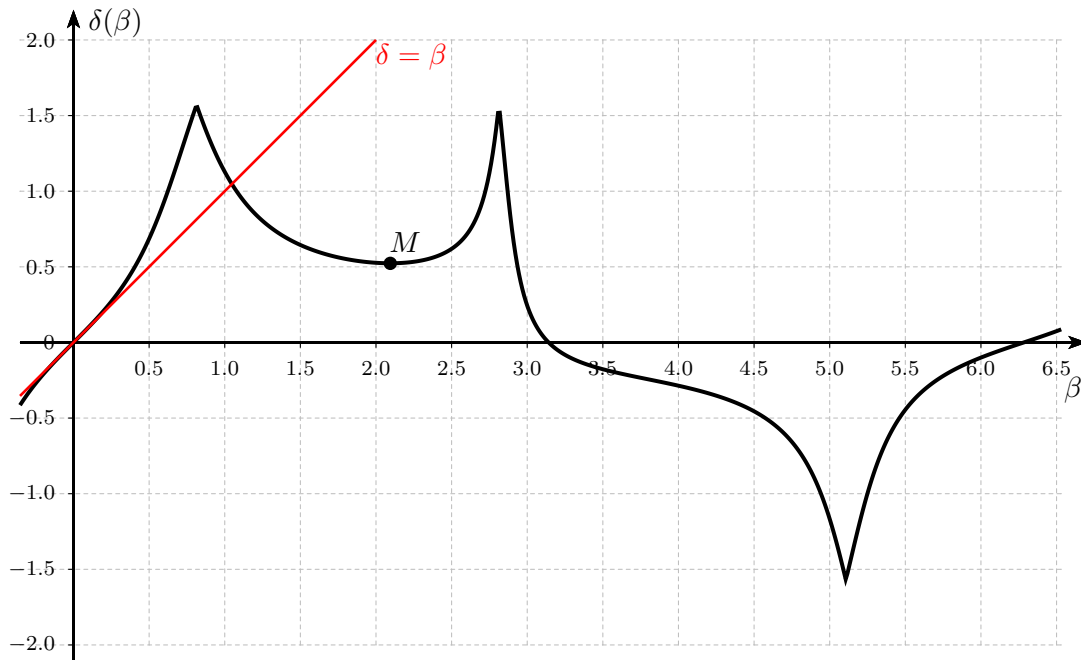
$$\delta = \arcsin \left(\frac{\sin \beta}{\sqrt{1 + 4 \cos \left(\frac{2\pi - 3\beta}{2} \right) \left(\cos \left(\frac{2\pi - 3\beta}{2} \right) + \cos \beta \right)}} \right)$$

oder mit der trigonometrischen Beziehung

$$\cos \left(\frac{2\pi - 3\beta}{2} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi - 3\beta}{2} \right) = \sin \left(\frac{3\beta - \pi}{2} \right)$$

$$\boxed{\delta(\beta) = \arcsin \left(\frac{\sin \beta}{\sqrt{1 + 4 \sin \left(\frac{3\beta - \pi}{2} \right) \left(\sin \left(\frac{3\beta - \pi}{2} \right) + \cos \beta \right)}} \right)} \quad (5)$$

Diese Funktion hat eine Periode von 4π und besitzt charakteristische Spitzen, wo der Winkel δ genau $\frac{\pi}{2}$ oder $-\frac{\pi}{2}$ beträgt. Die β -Werte für die Kronenspitzen geben keine einfache Ausdrücke und die algebraische Ermittlung dieser Werte ist aufwendig. Die Winkelhalbierende $\delta = \beta$ ist Tangente im Ursprung. Hier ist der Bereich für $0 \leq \beta \leq 2\pi$ abgebildet:



Berechnen wir jetzt δ für $\beta = \frac{4\pi}{9}$ (also 80°) mit der Formel (5):

$$\delta = \arcsin \left(\frac{\sin \frac{4\pi}{9}}{\sqrt{1 + 4 \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \left(\sin \left(\frac{\pi}{6} \right) + \cos \frac{4\pi}{9} \right)}} \right)$$

Mit $\sin \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}$ und alles unter die Wurzel gebracht, folgt:

$$\delta = \arcsin \left(\frac{\sin \frac{4\pi}{9}}{\sqrt{1 + 2 \left(\frac{1}{2} + \cos \frac{4\pi}{9} \right)}} \right) = \arcsin \left(\sqrt{\frac{\sin^2 \frac{4\pi}{9}}{2 + 2 \cos \frac{4\pi}{9}}} \right)$$

Wir wandeln den Sinus in einen Cosinus um:

$$\delta = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1 - \cos^2\frac{4\pi}{9}}{1 + \cos\frac{4\pi}{9}}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \cos\frac{4\pi}{9}}\right)$$

Die Doppelwinkelformel $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ liefert:

$$\delta = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \left(2 \cos^2\frac{2\pi}{9} - 1\right)}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2 \sin^2\frac{2\pi}{9}}\right) = \frac{2\pi}{9}$$

also $\delta = 40^\circ$, was man erwartet hat.

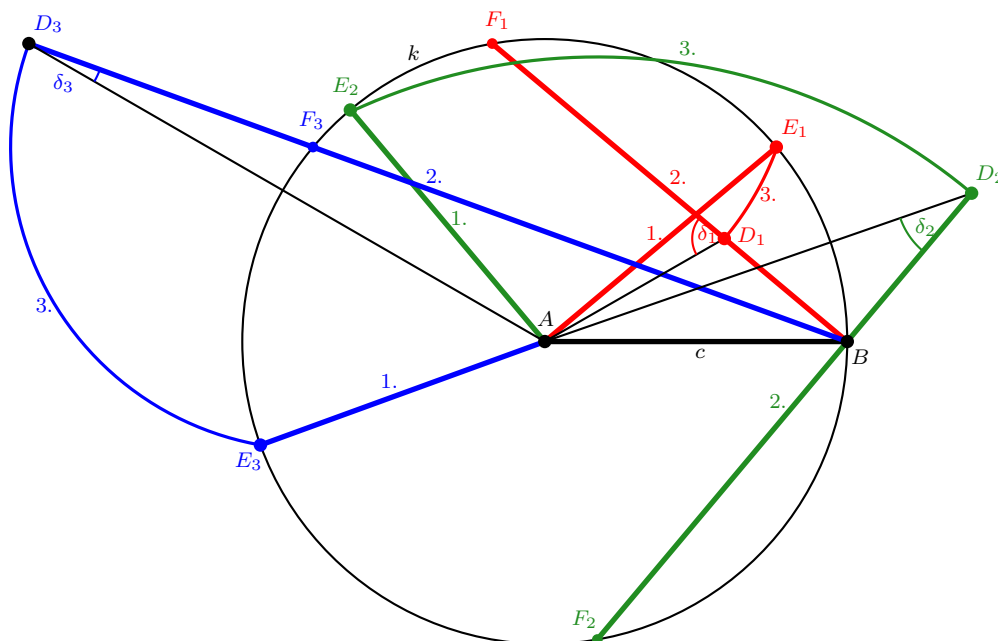
Mit Hilfe von einem CAS-Programm und Ausprobieren findet man noch andere Werte, die «schöne» Winkel ergeben. Bei $\beta = \frac{2\pi}{3}$ hat man das lokale Minimum M in der Kronenmulde.

β	$\frac{2\pi}{15}$	$\frac{2\pi}{11}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{2\pi}{7}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{14\pi}{15}$
δ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{11}$	$\frac{7\pi}{18}$	$\frac{3\pi}{7}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{6}$

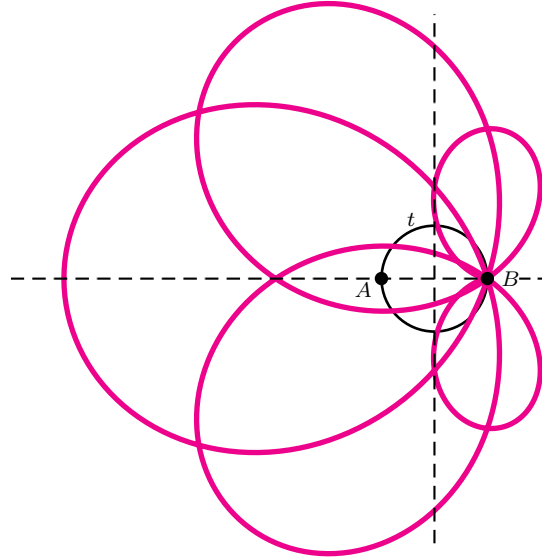
Wenn man mit dem folgenden Verfahren den Punkt D für $0 \leq \beta \leq 2\pi$ konstruiert, ergibt sich eine interessante Ortslinie für D und man kann die Funktion $\delta(\beta)$ geometrisch veranschaulichen:

1. Konstruiere den Strahl mit Winkel β zu AB mit Startpunkt A . β wird oberhalb von AB mit positivem Drehsinn eingetragen und der Schnittpunkt des Strahls mit dem Kreis k ist E .
2. Konstruiere die Gerade durch B mit Winkel β zu AB . β wird oberhalb von AB mit negativem Drehsinn eingetragen und der Schnittpunkt der Geraden mit dem Kreis k ist F .
3. Konstruiere den Kreisbogen mit Zentrum F und Radius FE mit Startpunkt E und in die negative Drehrichtung. Der erste Schnittpunkt mit der Geraden BF ist D .

Im nächsten Bild sind drei Konstruktionsbeispiele für $\beta_1 = 40^\circ$, $\beta_2 = 130^\circ$ und $\beta_3 = 200^\circ$ abgebildet. Auch wurden die dazugehörigen Winkel δ eingetragen. Die Beträge dieser Winkel stimmen mit den Werten der Kronenfunktion überein, wenn man als δ immer den spitzen Winkel zwischen den Geraden AD und BD nimmt, wie das bei β_1 der Fall ist. Das Vorzeichen des Winkels δ lässt sich mit dem Vektor \vec{AE} bestimmen. Das Vorzeichen der y -Komponente dieses Vektors ist gerade das Vorzeichen von δ , wie beim dritten Fall, wo δ_3 negativ ist.



Mit dem obigen Konstruktionsverfahren für $0 \leq \beta \leq 2\pi$ und mit umgekehrten Drehrichtungen bei allen drei Konstruktionspunkten für $-2\pi \leq \beta \leq 0$ bekommt man eine sehr schöne, geschlossene Ortslinie für D in Form einer Blume. Der Kreis t gehört nicht zur Ortslinie aber seine Schnittpunkte mit der Kurve ergeben die Spitzen der Kronenfunktion. An diesen Punkten ist δ ein rechter Winkel und t der dazugehörige Thaleskreis.



Wenn man das Zentrum dieses Thaleskreises mit Durchmesser c als Mitte eines Koordinatensystems wählt, kann man die Koordinaten des Punktes D in Abhängigkeit von c und β ausdrücken. Aus der Abbildung links von Gleichung (2) lassen sich die Koordinaten für D relativ leicht bestimmen:

$$D \left(\frac{c}{2} - (d + e) \cos \beta \mid (d + e) \sin \beta \right)$$

Somit lässt sich mit den Ausdrücken $d = 2c \cos \beta$ und $e = 2c \sin \left(\frac{3\beta - \pi}{2} \right)$, die wir bei der Herleitung der Formel (5) gebraucht haben, folgende parametrische Form für die Blumenkurve herausfinden für $-2\pi \leq \beta \leq 2\pi$:

$$\begin{cases} x(\beta) = \frac{c}{2} \left[1 - 4 \cos \beta \left(\cos \beta + \sin \left(\frac{3\beta - \pi}{2} \right) \right) \right] \\ y(\beta) = 2c \left[\cos \beta + \sin \left(\frac{3\beta - \pi}{2} \right) \right] \sin \beta \end{cases}$$

Es gibt noch einige interessante Eigenschaften dieser Ortslinie. Hier sind einige davon aufgelistet:

- Die y -Achse schneidet die Kurve an 8 Punkten mit Vielfachen von $\frac{\pi}{7}$ und $\frac{\pi}{3}$ für β .
- Die Blumenkurve schneidet die x -Achse bei $(-\frac{7c}{2}, 0)$, $(-\frac{3c}{2}, 0)$ und $(\frac{c}{2}, 0)$.
- Die Blumenkurve lässt sich in einem Rechteck der Breite $\frac{9c}{2}$ und Höhe $\frac{3c\sqrt{3}}{2}$ einschließen und berührt das Rechteck an fünf Punkten mit speziellen Werten für β .
- Die 10 Schnittpunkte der Blumenschleifen schneiden sich bei speziellen Werten von β und liegen in der Regel an den Spitzen von gleichseitigen Dreiecken, so dass man viele Punkte der Kurve leicht konstruieren kann.

Weitere Eigenschaften lassen sich bestimmt noch finden. Ich danke an dieser Stelle Peter Gallin für seine wertvollen Rückmeldungen und den spannenden mathematischen Austausch.



Ist das Universum ein riesiger Donut?

Monika Krichel, Departement Mathematik, ETH Zürich, communication@math.ethz.ch

Wettbewerb für Schulklassen

Wie könnte ein 2-dimensionales Universum aussehen? Ist es flach wie ein Blatt Papier oder hat es die Form eines Donuts? Und wie stellen sich die Bewohnerinnen und Bewohner dieses Universums, die sogenannten «Flatlander», ihre Welt vor?

Machen Sie sich zusammen mit Ihrer Klasse Gedanken über eine mögliche Form des Flatlander-Universums und versuchen Sie dieses mit Hilfe eines Objekts darzustellen.

Das Departement Mathematik der ETH Zürich lädt interessierte Schulklassen der Sekundarstufen I und II ab Herbst 2021 zur Wettbewerbsteilnahme ein. Die eingereichten Wettbewerbsobjekte werden als Teil der zweiwöchigen Ausstellung «The Shape of Space» vom 14. bis 25. März 2022 in der Haupthalle der ETH Zürich ausgestellt und die Besten werden prämiert.

Aufgabenstellung und Wettbewerbsteilnahme

Welche Form hat das Universum der Flatlander?

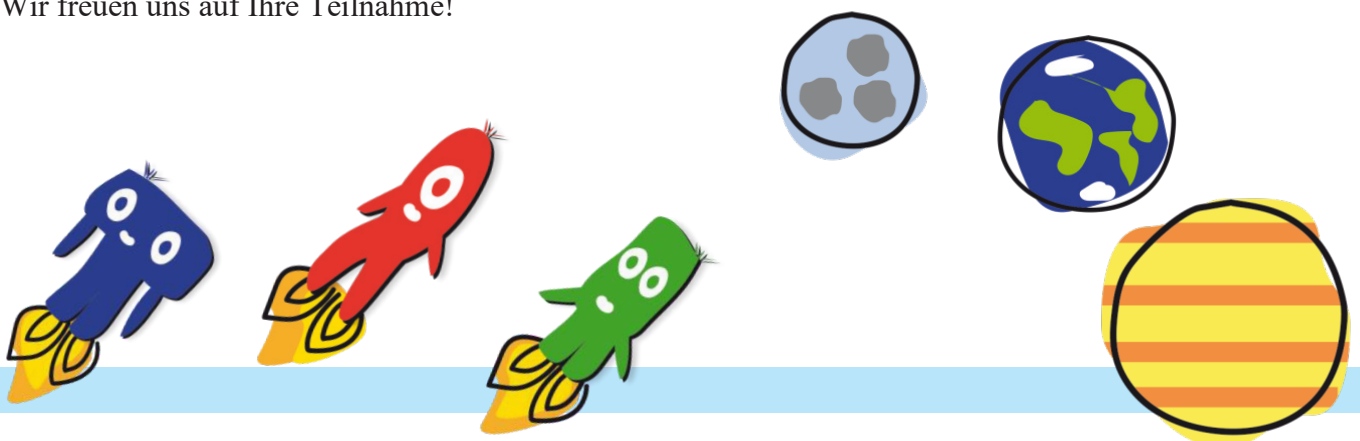
Flatlander sind 2-dimensionale Wesen, die in einem 2-dimensionalen Universum leben. Lange meinten die Flatlander, ihr Universum sei eine unendlich grosse Ebene, bis die Mutigsten von ihnen anfangen ihr Universum zu erforschen und merkwürdige Phänomene beobachteten. Mal reisten sie nach Norden und kamen aus dem Süden zurück, mal war der Weg länger, mal kürzer und einmal waren sie bei ihrer Rückkehr spiegelverkehrt. Überlegen Sie sich wie das Universum der Flatlander aussehen könnte und wie die Flatlander, die es gewohnt sind 2-dimensional zu denken, dieses überhaupt erfassen können. Helfen Sie den Flatlandern bei der Erforschung ihrer Welt und konstruieren Sie ein Objekt, welches das Universum der Flatlander darstellt. Wir sind gespannt!

Teilnahme am Wettbewerb

Details zur Anmeldung und zum Ablauf des Wettbewerbs folgen in einem Brief an die Schulen im Juni 2021.

Nach der Anmeldung zum Wettbewerb erhalten die Lehrpersonen im Herbst 2021 detaillierte Instruktionen und Beispiele zur Einführung ins Thema und Gestaltung einer Lektion. Zusätzlich kann gratis eine Unterrichtslektion gebucht werden, welche von Studierenden oder Doktorierenden des Departements Mathematik der ETH Zürich geleitet wird. Diese werden zusammen mit Ihnen und Ihrer Klasse die Aufgabenstellung diskutieren und bei der Planung des Objekts beratend helfen.

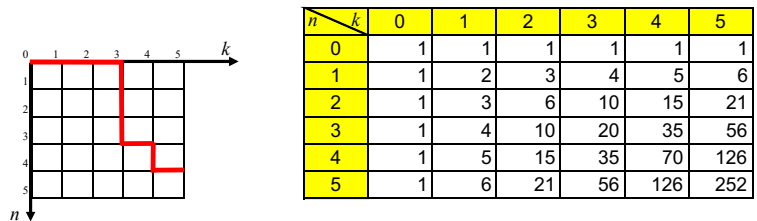
Wir freuen uns auf Ihre Teilnahme!



Anzahl Gitterwege ohne und mit Diagonalen oder Die Delannoy-Zahlen

Peter Gallin, peter@gallin.ch

Es ist allgemein bekannt, wie viele Gitterwege vom Punkt $(0,0)$ zum Punkt (n,k) führen, wenn nur Wege längs der Gitterkanten zugelassen sind. Dann haben nämlich alle Wege die Länge $n+k$ und bestehen aus k horizontalen Schritten (H) und n vertikalen Schritten (V). Ein Weg ist also charakterisiert durch eine Folge von $n+k$ Buchstaben H oder V . Man muss also von den $n+k$ Stellen nur jene angeben, wo die k Buchstaben H liegen. Das ist eine Kombination ohne Wiederholung von k aus $n+k$. Es gibt also $\binom{n+k}{k}$ Wege. Die nachfolgende Abbildung zeigt links das Gitter mit dem Weg $HHHVVVHVH$ zum Punkt $(4,5)$ und rechts die zugehörige Tabelle mit der Anzahl Wege zu jedem Gitterpunkt hin. Die Zahlen sind die Binomialkoeffizienten und man kann deren Rekursionsformel geometrisch interpretieren, indem man sagt, dass die Anzahl Wege zum Punkt (n,k) sich ergibt als Summe der Anzahl Wege zum Punkt $(n-1,k)$ und der Anzahl Wege zum Punkt $(n,k-1)$.



Etwas weniger bekannt ist die Tatsache, dass diese Wege auch anders charakterisiert werden können: Man kann nämlich bloss angeben, in welcher der $n+1$ Zeilen ein horizontaler Schritt gemacht werden soll. Man muss also aus den $n+1$ Zahlen $0, 1, \dots, n$ genau k Zahlen aufsteigend auswählen und zwar mit Wiederholung. Unser Weg wird also durch $0,0,0,3,4$ charakterisiert. Das ist das Problem der Kombinationen mit Wiederholung von k aus $n+1$. Offenbar gibt es immer noch $\binom{n+k}{k}$ Wege, womit dieses eher schwierige kombinatorische Problem auch gelöst ist. Setzen wir $n' = n+1$, so heisst also die Antwort:

Es gibt $\binom{n'+k-1}{k}$ Kombinationen mit Wiederholung bei k aus n' .

Wenn nun aber auch Diagonalschritte von Gitterpunkt zu Gitterpunkt zugelassen sind, wenn also im Gitter nicht nur nach Osten und Süden, sondern auch nach Südosten geschritten werden darf, dann wird die Sache etwas komplizierter, weil die Weglänge nicht mehr konstant ist. Zum Glück ist aber die Rekursionsidee nach wie vor anwendbar. Die Anzahl Wege $d_{n,k}$ zum Gitterpunkt (n,k) ist die Summe der Anzahl Wege zum Punkt $(n-1,k-1)$ und der Anzahl Wege zum Punkt $(n-1,k)$ und der Anzahl Wege zum Punkt $(n,k-1)$. Es gilt also

$$d_{n,k} = d_{n-1,k-1} + d_{n-1,k} + d_{n,k-1} .$$

Somit kann man sofort eine entsprechende Tabelle mit den Anzahl Wegen erstellen, wobei sich jetzt die Frage stellt, ob es für die Zahlen der Tabelle — die Delannoy-Zahlen $d_{n,k}$ — auch einen einfachen Berechnungsweg gibt. Eine Internet-Suche mit diesem Stichwort lässt einen zweifeln. Es soll hier ein elementarer Weg gezeigt werden.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1	1
1	1	3	5	7	9	11
2	1	5	13	25	41	61
3	1	7	25	63	129	231
4	1	9	41	129	321	681
5	1	11	61	231	681	1683

Die Delannoy-Zahlen $d_{n,k}$

Die Methode, die uns zum Ziel führt, ähnelt sehr derjenigen, die ich beim Artikel zur Menschenpyramide im Bulletin Nr. 144 angewandt hatte. Dort führte sie allerdings auf ein wenig befriedigendes Ergebnis, das dann im Bulletin Nr. 145 verbessert wurde.

Die folgende Tabelle zeigt in der ersten Spalte die Zahlen $d_{n,k}$ aus der Spalte $k = 4$ der obigen Tabelle. In der zweiten Spalte steht die erste Differenzenfolge. Man stellt fest, dass die vierte Differenzenfolge konstant ist. Das bedeutet, dass die Delannoy-Zahlen in der Spalte k arithmetische Folgen k -ter Ordnung sind. Die eingerahmten Startzahlen der Differenzenfolgen nennen wir Randzahlen und bezeichnen sie mit $r_{k,i}$, wobei der Index i von 0 bis k läuft.

$d_{0,4} =$	1	4			
$d_{1,4} =$	9	8	6		
$d_{2,4} =$	41	32	24	4	
$d_{3,4} =$	129	88	56	32	1
$d_{4,4} =$	321	192	104	48	16
$d_{5,4} =$	681	360	168	64	16

Im Bulletin Nr. 120 vom September 2012 habe ich gezeigt, dass eine arithmetische Folge k -ter Ordnung aus den Randzahlen gewonnen werden kann, so dass wir folgenden Ausdruck erhalten:

$$d_{n,k} = \sum_{i=0}^k r_{k,i} \binom{n}{i}$$

Man kann sich diesen Aufbau auch direkt überlegen, indem man eine Zahl $d_{n,k}$ als Summe ihrer Nachbarn oben und rechts denkt und diese Nachbarn wiederum als Summe der Nachbarn, so dass die Summanden mit den Binomialkoeffizienten gewichtet werden müssen. Zu beachten ist, dass für $i > n$ die Binomialkoeffizienten wegfallen. Man summiert also bei $n < k$ nur bis $i = n$.

Dividiert man nun die Randzahlen durch Zweierpotenzen, und zwar durch 2^i , so ergeben sich direkt die Binomialkoeffizienten der k -ten Zeile des Pascal-Dreiecks. Ich habe diese Binomialkoeffizienten über den eingerahmten Randzahlen notiert. Dies gilt für alle k , was zu beweisen wäre. Wir erhalten also:

$$r_{k,i} = 2^i \binom{k}{i}$$

Damit ergibt sich bereits die Schlussformel für die Delannoy-Zahlen:

$$d_{n,k} = \sum_{i=0}^k 2^i \binom{k}{i} \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{\min(n,k)} 2^i \binom{k}{i} \binom{n}{i}$$

Erst durch das Verdeutlichen der oberen Summationsgrenze $i = \min(n, k)$ wird klar, dass die Formel symmetrisch in n und k ist. Jetzt müsste noch bewiesen werden, dass die Rekursionsformel

$$d_{n+1,k+1} \stackrel{?}{=} d_{n,k} + d_{n,k+1} + d_{n+1,k}$$

erfüllt wird. Diese etwas knifflige Übung im Umbauen von Binomialkoeffizienten empfehle ich den geneigten Leserinnen und Lesern. Der Beweis steht zur Kontrolle auf den nächsten Seite.

Beweis: Wir schreiben beide Seiten der fraglichen Gleichung gemäss der eingerahmten Formel um:

$$\sum_{i=0}^{k+1} 2^i \binom{k+1}{i} \binom{n+1}{i} \stackrel{?}{=} \sum_{i=0}^k 2^i \binom{k}{i} \binom{n}{i} + \sum_{i=0}^{k+1} 2^i \binom{k+1}{i} \binom{n}{i} + \sum_{i=0}^k 2^i \binom{k}{i} \binom{n+1}{i}$$

Nun bearbeiten wir die linke Seite (*LS*) mit der Grundeigenschaft der Binomialkoeffizienten und vereinheitlichen den Summationsindex auf die obere Grenze $i = k$:

$$\begin{aligned} LS &= \sum_{i=0}^{k+1} 2^i \binom{k+1}{i} \binom{n+1}{i} = 2^{k+1} \binom{n+1}{k+1} + \sum_{i=0}^k 2^i \left(\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i} \right) \left(\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right) = \\ &= 2^{k+1} \binom{n}{k} + 2^{k+1} \binom{n}{k+1} + \sum_{i=0}^k 2^i \left[\binom{k}{i-1} \binom{n}{i-1} + \binom{k}{i-1} \binom{n}{i} + \binom{k}{i} \binom{n}{i-1} + \binom{k}{i} \binom{n}{i} \right] = \\ &= 2^{k+1} \binom{n}{k} + 2^{k+1} \binom{n}{k+1} + \sum_{i=0}^k 2^i \binom{k}{i-1} \binom{n}{i-1} + \sum_{i=0}^k 2^i \left[\binom{k}{i-1} \binom{n}{i} + \binom{k}{i} \binom{n}{i-1} + \binom{k}{i} \binom{n}{i} \right] \end{aligned}$$

Jetzt wenden wir uns der rechten Seite (*RS*) zu und vereinheitlichen die obere Summationsgrenze und die oberen Zahlen in den Binomialkoeffizienten:

$$\begin{aligned} RS &= \sum_{i=0}^k 2^i \binom{k}{i} \binom{n}{i} + \sum_{i=0}^{k+1} 2^i \binom{k+1}{i} \binom{n}{i} + \sum_{i=0}^k 2^i \binom{k}{i} \binom{n+1}{i} = \\ &= 2^{k+1} \binom{n}{k+1} + \sum_{i=0}^k 2^i \left[\binom{k}{i} \binom{n}{i} + \left(\binom{k}{i} \binom{n}{i} + \binom{k}{i-1} \binom{n}{i} \right) + \left(\binom{k}{i} \binom{n}{i} + \binom{k}{i} \binom{n}{i-1} \right) \right] = \\ &= 2^{k+1} \binom{n}{k+1} + \sum_{i=0}^k 2^{i+1} \binom{k}{i} \binom{n}{i} + \sum_{i=0}^k 2^i \left[\binom{k}{i-1} \binom{n}{i} + \binom{k}{i} \binom{n}{i} + \binom{k}{i} \binom{n}{i-1} \right] \end{aligned}$$

Vergleicht man die umgewandelten linken und rechten Seiten, so erkennt man, dass ein Summand ohne Summenzeichen und die Summe mit den eckigen Klammern übereinstimmen. Damit bleibt nur noch Folgendes zu beweisen:

$$2^{k+1} \binom{n}{k} + \sum_{i=0}^k 2^i \binom{k}{i-1} \binom{n}{i-1} \stackrel{?}{=} \sum_{i=0}^k 2^{i+1} \binom{k}{i} \binom{n}{i}$$

In der linken Summe können wir den Index von $i = 1$ an laufen lassen, da für $i = 0$ der Summand verschwindet. Gleichzeitig schreiben wir j anstatt i :

$$2^{k+1} \binom{n}{k} + \sum_{j=1}^k 2^j \binom{k}{j-1} \binom{n}{j-1} \stackrel{?}{=} \sum_{i=0}^k 2^{i+1} \binom{k}{i} \binom{n}{i}$$

Nun ersetzen wir $j = i + 1$ oder $i = j - 1$ und erhalten eine korrekte Aussage:

$$2^{k+1} \binom{n}{k} + \sum_{i=0}^{k-1} 2^{i+1} \binom{k}{i} \binom{n}{i} \stackrel{\surd}{=} \sum_{i=0}^k 2^{i+1} \binom{k}{i} \binom{n}{i}$$



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht Programm Herbstsemester 2021

Die Vorträge finden jeweils am Donnerstag um 17.15 Uhr im Hörsaal HG G 19.1 des Hauptgebäudes der ETH Zürich statt.

Donnerstag, 28. Oktober 2021

Statistische Hypothesentests: Eine anschauliche Einführung

Markus Kalisch, ETH Zürich

Lukas Meier, ETH Zürich

Donnerstag, 11. November 2021

Was ist das, ein Flächeninhalt?

Klaus Volkert, Universität Wuppertal

Donnerstag, 25. November 2021

Primzahlverteilung, Zetafunktion, RIEMANN'sche Vermutung

... den Vorhang eine Handbreit aufgemacht ...

Giancarlo Copetti, Kantonsschule Schaffhausen

Donnerstag, 9. Dezember 2021

Ein mathematisches Modell zur Klimaänderung

Albert Fässler

Herzlich laden ein: M. Akveld, D. Grawehr, J. Hromkovič, N. Hungerbühler, P. Spindler

Diese und weitere Veranstaltungshinweise finden Sie unter:
math.ch/mathematics@school

Goldene Leistungen an der Schweizer Mathematik-Olympiade

Lara Gafner, Wissenschafts-Olympiade, l.gafner@olympiad.ch

Vom 14. bis 21. Februar fand das Finale der Mathematik-Olympiade statt. Die besten 28 Nachwuchsmathematikerinnen und -mathematiker der Schweiz setzten sich zuhause vor ihre Computer und grübelten um die Wette – motiviert durch Medaillen, Wissensdurst und die Liebe zur Mathematik.

Gold ging an Philipp Junghans (Alte Kantonsschule Aarau, AG) und Yanta Wang (Gymnasium Oberwil, BL). Dazu wurden sechs Silber- und fünf Bronzemedailles verliehen. Bis sie diese in den Händen halten können, müssen die Jugendlichen aber noch bis zur offiziellen Rangverkündung warten, die zu einem späteren Zeitpunkt stattfindet.

Keine Spaziergänge am See

Letztes Jahr konnte das Finallager der Mathematik-Olympiade der Corona-Pandemie noch knapp entgehen. Dieses Jahr fanden Unterricht und Prüfungen online statt. Für ein bisschen sozialen Austausch sorgten Videoanrufe und virtuelle Spielabende – mit Schach oder dem Kartenspiel Tichu. «Ich bin sehr froh, dass sich die Freiwilligen so viel Mühe gegeben haben, dass der soziale Aspekt dieses Jahr nicht ganz wegfällt», meint Emily Dikhoff, die eine Bronze-Medaille gewonnen hat. Das Lagerleben in Aarburg wurde dennoch vermisst: «Mit Freunden spazieren, die Aussicht auf den See geniessen, Sport treiben... da entsteht eine ganz besondere Stimmung, welche mir sehr gefehlt hat», sagt der Drittplatzierte Johann Williams. Auch die zwei vierstündigen Prüfungen, welche über den Platz auf der Rangliste entscheiden, meisterten die Teilnehmenden in den eigenen vier Wänden. Für manche kam in der gewohnten Umgebung weniger Nervosität auf, anderen fehlte die Atmosphäre im Prüfungsraum und die gegenseitige Unterstützung.

Über den Schulstoff hinaus

Inhaltlich änderte sich durch die virtuelle Durchführung nichts an den Prüfungen. Wie an der Mathematik-Olympiade üblich standen Beweise und logisches Denken im Vordergrund. Die Goldmedaille um einen Punkt verpasst zu haben, nervt Johann zwar ein bisschen, aber dafür fand er die Prüfungsaufgaben dieses Jahr besonders interessant. «Die Aufgaben sind ganz anders, als die meisten es sich vorstellen. Es geht nicht darum etwas zu berechnen, wie man das aus der Schule kennt», erklärt Emily. Sie hat schon mehrmals an der Mathematik-Olympiade teilgenommen und ist stolz auf die Fortschritte, die sie dieses Jahr durch viel Übung erreicht hat. Sie hat sich bereits zum zweiten Mal für die Europäische Mathematik-Olympiade für Mädchen qualifiziert und träumt davon, in Zukunft auch an der Mitteleuropäischen oder der Internationalen Mathematik-Olympiade teilzunehmen. Für jene, die kurz vor dem Schulabschluss stehen, ist dies die letzte Mathematik-Olympiade. Dafür warten andere Abenteuer: Johann plant zum Beispiel ein Mathematik-Studium in Cambridge.



Bild: Valentin Imbach (Mathematik-Olympiade)

Ab Herbst 2021 können sich Ihre Schülerinnen und Schüler für die Schweizer Mathematik-Olympiade anmelden. Informieren Sie sich auf mathematical.olympiad.ch.

Grosser Erfolg für die Schweiz an Französischsprachiger Mathematik-Olympiade

Lara Gafner, Wissenschafts-Olympiade, l.gafner@olympiad.ch

Am 27. und 28. März organisierte die Schweiz die zweite «Olympiade francophone de mathématiques» (OFM), die den mathematischen Nachwuchs in der französischsprachigen Welt fördert. Insgesamt 88 Jugendliche aus neun Ländern nahmen am virtuellen Wettbewerb teil. Das Schweizer Team legte eine beeindruckende Leistung an den Tag.

In der Kategorie «Senior» traten an:

- Mathys Douma, Lycée Cantonal Porrentruy, JU (Goldmedaille)
- Johann Williams, Gymnase de Renens, VD (Goldmedaille)
- Joël Huber, Gymnasium Freudenberg, ZH (Silbermedaille)
- Tan Hong, Collège Calvin, GE (Bronzemedaille)
- Philipp Junghans, Alte Kantonsschule Aarau, AG (Bronzemedaille)
- Yanta Wang, Gymnasium Oberwil, BL

In der Kategorie «Junior» (Jahrgang 2005 oder jünger) traten an:

- Jonah Osterwalder, Gymnase de Renens, VD (Goldmedaille)
- Bora Olmez, International School Basel, BL (Goldmedaille)
- Leonardo Marañón, Gymnase cantonal de Nyon, VD (Silbermedaille)
- Orlando Zhang, Institut International de Lancy, GE (Silbermedaille)
- Mohamed Bouchouata, Gymnase français de Bienne, BE (Bronzemedaille)
- Moyang Zhang, Institut Florimont, GE

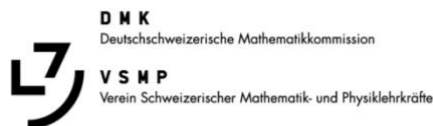
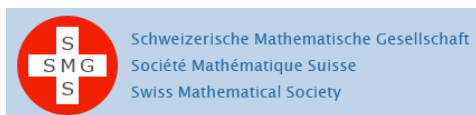
«Einfach nur: Wow!»

Insgesamt gingen vier Gold und je drei Silber- und Bronzemedailles an die Schweizer Teilnehmenden. Jonah Osterwalder landete mit seiner Punktezahl auf dem ersten Platz der Kategorie «Junior». «Einfach nur: Wow!», kommentiert der Organisator Arnaud Maret die Gesamtleistung. Die viereinhalbstündige Prüfung fand am Samstagmorgen statt und entsprach von Format her den Standards anderer internationaler Mathematik-Olympiaden. «Sie waren dieses Jahr echt motivierend», sagt Mathys Douma über die Aufgaben aus den Themenbereichen Algebra, Geometrie, Zahlentheorie und Kombinatorik. Er war bereits bei der ersten OFM dabei, die 2020 von Frankreich lanciert wurde, und freut sich, dass er seine eigene Leistung toppen konnte.

Eine Zukunft jenseits des Bildschirms

Neben dem Gastgeberland waren an der OFM 2021 Frankreich, Belgien, Luxemburg, Kanada, Marokko, Tunesien, Algerien und Kamerun vertreten. Für das Schweizer Team war der Anlass auch eine Chance, Sprachgrenzen zu überwinden. Nicht nur Schülerinnen und Schüler aus der Romandie machten beim auf Französisch durchgeführten Wettbewerb mit. Arnaud Maret hofft, dass der neue Anlass zur Tradition wird: «Wir hoffen sehr, dass die OFM weitergeführt wird und dass wir eines Tages eine Olympiade organisieren können, bei der man sich in einem der französischsprachigen Länder persönlich trifft», meint er. «Bis dann ist die Online-Olympiade eine gute Alternative.»

Ab Herbst 2021 können sich Ihre Schülerinnen und Schüler für die Schweizer Mathematik-Olympiade anmelden. Informieren Sie sich auf mathematical.olympiad.ch.



31. Schweizerischer Tag über Mathematik und Unterricht

Die Schweizerische Mathematische Gesellschaft SMG, die Deutschschweizerische Mathematikkommission DMK und die ETH Zürich laden Sie herzlich zu dieser Weiterbildungsveranstaltung ein.

Ort:	Neue Kantonsschule Aarau
Datum:	Mittwoch, 15. September 2021
Organisation:	Meike Akveld (ETH), Claude Gittelsohn (NKSA), Lorenz Halbeisen (ETH), Norbert Hungerbühler (ETH), Gisela Phillips-Widmer (NKSA)
Kurskosten:	Gegen Entrichtung der Tagungsgebühr von 30 CHF erhalten die Teilnehmerinnen und Teilnehmer einen Bon für das Mittagessen.
Anmeldung:	bis 1. September 2021

Programm

Check-in: Kaffee, Orangensaft und Gipfeli; Einziehen der Tagungsgebühr	09.30 – 10.00 Uhr
Begrüssung	10.00 – 10.15 Uhr
Vortrag: Beat Jaggi (Pädagogische Hochschule Bern) <i>Ein Plädoyer für Zahlenfolgen</i>	10.15 – 11.15 Uhr
Aufsuchen der Workshopzimmer	11.45 – 12.00 Uhr
Workshops (siehe unten)	12.00 – 13.00 Uhr
Mittagessen: Mensa	13.00 – 14.15 Uhr
Workshops (siehe unten)	14.15 – 15.15 Uhr
Kaffeepause	15.15 – 15.45 Uhr
Vortrag: Rainer Kaenders (Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn) <i>Ungewöhnliche Integrations- und Differentiationsmethoden mit Elementargeometrie</i>	15.45 – 16.45 Uhr
Ende der Veranstaltung	16.45 Uhr

Die Zeitangaben sind provisorisch.

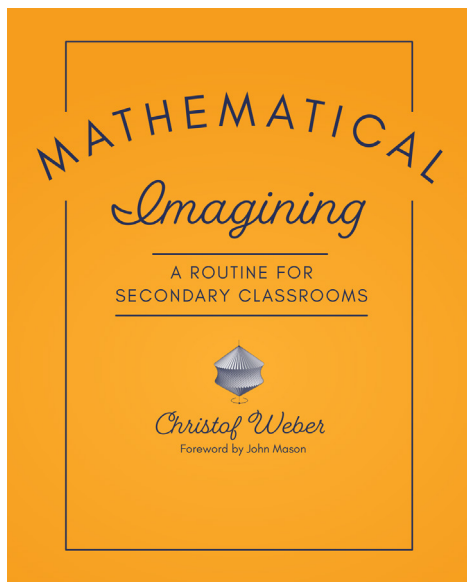
Workshops

- *Arduino im Mathematikunterricht*, Gisela Phillips-Widmer (Neue Kantonsschule Aarau)
- *Interaktive Aktivitäten mit desmos.com*, Claude Gittelsohn (Neue Kantonsschule Aarau)
- *Mathe-Club für helle Köpfe*, Tatiana Samrowski (Universität Zürich)
- *Brett- und Denkspiele mit Graphentheorie*, Beat Jaggi (Pädagogische Hochschule Bern)
- *BYOD im Mathematikunterricht*, Christian Wüst (Neue Kantonsschule Aarau)
- *Neue Lehrmittel für den Mathematik-Unterricht am Gymnasium*, Armin Barth (Kantonsschule Baden/ETH Zürich)
- *Blockchain Decrypted*, Georgette Weingärtner (ETH Zürich)

Weitere Informationen zu den Vorträgen, Workshops, Anreise sowie das Anmeldeformular finden Sie unter: www.math.ch/TMU2021

Book Review: ‘Mathematical Imagining: a Routine for Secondary Classrooms’ by Christof Weber

Kevin Inderbitzin, Theresianum Ingenbohl, kevin.inderbitzin@icloud.com



Stenhouse Publishers (2020), 234 pages
paperback for €35.00, ISBN 978-1-62531-277-8
e-book as EPUB and others, ISBN 978-1-62531-278-5

- ‘Imagine that you are drawing a horizontal line segment that is about as long as your forearm is wide. . . .
- Divide your line segment into three sections that all have the same length - and then *delete* the section that is in the middle. . . . Now you have two sections left over: the first one and the third one. . . .
 - Now *divide* each of your two remaining sections into three equally long sections. And once again, *delete* the section in the middle. . . .
 - Now repeat this process of dividing into three sections and removing the middle third. . . . Keep doing this *over* and *over* and over again. . . .’

This book excerpt on ‘Constructing the Cantor Set’ is one of over thirty exercises on mathematical imagining to begin a lesson with. The author Christof Weber, an experienced high school teacher himself, has used them all with his students and explains what their benefits are besides grasping the student’s attention after the bell. Most intriguing to me was the vast number of links to other topics. On the three pages that follow the above exercise we learn why the self-similarity of the Cantor set becomes a possible by-product of the visualization process and why the ‘dimension’ of the Cantor set is between zero and one (namely about 0.63). Furthermore, this exercise on level of difficulty three (out of three) may serve as a motivational example for the topics of fractals, non-decimal numeral systems and uncountable sets.

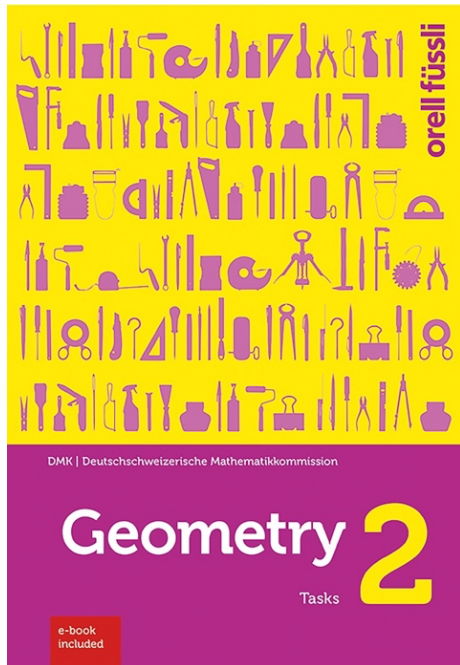
The imagining exercises are not categorized according to the standard high-school mathematics curriculum but according to the main type of mathematical activity involved (complete with overview tables): construction, problem-solving, reasoning and investigating paradoxes. This reflects an overall idea of the book: Even though a few concepts from the standard curriculum are discussed (e.g. by moving building blocks to calculate $35 \cdot 35$), you are motivated to study possible mental images when challenged with geometric and non-geometric concepts. Therefore, this book provides a helpful tool to further improve your skills to connect to the mathematical ideas which students develop. Keys for success and potential challenges on this path are discussed in concise language and general guidelines on how to develop your own imagining exercises are provided.

This book, which is the translation of the originally published German version from 2010 by Friedrich Verlag (‘Mathematische Vorstellungsübungen im Unterricht’ by the same author), will be of great interest for teachers of bilingual mathematics classes. You may study a single exercise in roughly 20 minutes (maybe over your lunch break?) but be aware that you will often find yourself browsing for even more activity-related content. The motivation to try out as many imagining exercises in your class as possible will grow with every minute you spend with the book!

* * *

Jetzt erhältlich: Geometry 2

Die Eins-zu-eins-Übersetzung des von der DMK herausgegebenen Schulbuches für den Immersionsunterricht ist erschienen !



Geometry 2

- **Tasks**
inklusive **E-Book** (enthält auch englischsprachige Vorlagen für Konstruktionsaufgaben)
1. Auflage 2021
160 Seiten, 18.4 x 26.5 cm, broschiert
ISBN 978-3-280-04237-3
Fr. 34.-
- **Kommentierte Lösungen**
(nur auf Deutsch erhältlich)
inklusive **E-Book**
1. Auflage 2019
186 Seiten, 21.0 x 29.7 cm, broschiert
ISBN 978-3-280-04138-3
Fr. 87.-

Das seit 2019 erhältliche DMK-Lehrmittel «Geometrie 2» ist aufgrund des sich immer mehr ausbreitenden bilingualen Unterrichts an Gymnasien auch in englischer Sprache erschienen. Die beiden Sprachversionen sind in Inhalt und Gestaltung identisch und können parallel zueinander verwendet werden. Auch die im deutschen E-Book enthaltenen Kopiervorlagen der Arbeitsblätter für Konstruktionsaufgaben wurden übersetzt.

«Geometry 2» umfasst den gesamten Unterrichtsstoff für das Kurzzeitgymnasium und kann unabhängig vom ersten Band verwendet werden. Vielfältige Problemstellungen, Arbeitsweisen und Lösungsmethoden stehen im Zentrum der Aufgabensammlung. Jedes Kapitel enthält vermischte und weiterführende Aufgaben, um das Gelernte zu festigen und um ein Angebot an herausfordernden Fragestellungen zu bieten. Am Schluss des Buches sind die numerischen Lösungen angegeben.

Separat sind auch die deutschsprachigen «Kommentierten Lösungen» mit ausführlichen Lösungen, Kommentaren, kurzer Theorie, digitalen Vorlagen und E-Book erhältlich.

Das komplette DMK-Lehrmittelprogramm ist hier zu finden:

Bestellungen unter:



Le logogriphe d'Euler

Didier Müller, Lycée cantonal de Porrentruy

Le grand mathématicien suisse Leonhard **Euler** (1707-1783), extrêmement prolifique dans beaucoup de domaines, n'est pas connu pour avoir laissé son empreinte dans le domaine de la cryptographie. Cependant, en arithmétique, le théorème d'Euler sous-tend le cryptosystème RSA, largement utilisé dans les communications Internet. Mais ceci est une autre histoire...

À la fin d'une assez longue lettre à Christian Goldbach consacrée au calcul différentiel et datée du 4 juillet 1744, Euler propose un texte chiffré qu'il appelle « Logogryphum » et qui, à son avis, est difficile à décrypter.

*pxqfwlznjdvnstiddkqxhleebfxdfgtlzbccfbkfodxokfnglqxnscnejmlckzxhrfwjgfh
 xvzjnbgyxcdgixkoxjmlncoigdxvzflmefnyjqfangvnylrcxfonbfjalrkwfmbfpjoizoxq
 knubrofadgiaxwkcbrbcklofrnjwgnzfzhgjfbcfvqjtxeevtbfyjsbzh/mlnbg/sqjwgl
 nxvzfkonbcoigdxvrkfjalzxt/nilensfgvboofcxnnfgnkbcjnnjnynxvplgnbfzfoxeejgdxbcj
 cndfyvdbhzlnvyxmbcbllobbcyfekonbceiobfplwsxxzxfjcndbhrlzqxsfonbcoljffyyqfm
 jeevhleexoiezmgicdfnktvoldxnfbxofctvpxrnv*

Il avait raison puisqu'il a fallu attendre 1953 pour que quelqu'un y parvienne ! Euler précise dans sa lettre que le texte clair est en latin, ce qui sera d'une grande aide. Reste à trouver le système de chiffrement...

C'est le suisse Pierre **Speziali** (1913-1995), chargé de cours en histoire des sciences à l'Université de Genève, qui a été le premier à publier la solution [1]. Hans **Rohrbach** (1903-1993), mathématicien et cryptanalyste allemand, l'a trouvée indépendamment peu après. Nous allons voir comment.

Rohrbach a d'abord fait une analyse des fréquences. L'image ci-dessous, tirée de son article [2], montre la comparaison entre les fréquences des lettres en latin (à gauche) et celles du logogriphe (à droite) :

	50	100	150	200	250	Total	%		10	20	30	Total	%	
e	██████████	██████████	██████████	██████████	██████████	250	12.5	n	###	###	###	###	34	8.5
i	██████████	██████████	██████████	██████████	██████████	222	11.1	f	###	###	###	###	32	8.0
a	██████████	██████████	██████████	██████████	██████████	153	7.6	x	###	###	###	###	31	7.75
t	██████████	██████████	██████████	██████████	██████████	152	7.6	b	###	###	###	###	28	7.0
u	██████████	██████████	██████████	██████████	██████████	139	7.0	c	###	###	###	###	24	6.0
n	██████████	██████████	██████████	██████████	██████████	134	6.7	l	###	###	###	###	22	5.5
r	██████████	██████████	██████████	██████████	██████████	132	6.6	o	###	###	###	###	22	5.5
s	██████████	██████████	██████████	██████████	██████████	131	6.6	j	###	###	###	###	21	5.25
m	██████████	██████████	██████████	██████████	██████████	123	6.1	g	###	###	###	###	18	4.5
o	██████████	██████████	██████████	██████████	██████████	122	6.1	e	###	###	###	###	16	4.0
d	██████████	██████████	██████████	██████████	██████████	71	3.5	v	###	###	###	###	16	4.0
c	██████████	██████████	██████████	██████████	██████████	65	3.2	d	###	###	###	###	15	3.75
l	██████████	██████████	██████████	██████████	██████████	56	2.8	k	###	###	###	###	15	3.75
p	██████████	██████████	██████████	██████████	██████████	43	2.1	z	###	###	###	###	15	3.75
q	██████████	██████████	██████████	██████████	██████████	35	1.7	f	###	###	###	###	15	3.75
v	██████████	██████████	██████████	██████████	██████████	35	1.7	i	###	###	###	###	10	2.5
h	██████████	██████████	██████████	██████████	██████████	27	1.3	y	###	###	###	###	10	2.5
b	██████████	██████████	██████████	██████████	██████████	26	1.3	h	###	###	###	###	9	2.25
g	██████████	██████████	██████████	██████████	██████████	17	0.8	q	###	###	###	###	9	2.25
f	██████████	██████████	██████████	██████████	██████████	14	0.7	r	###	###	###	###	9	2.25
x	██████████	██████████	██████████	██████████	██████████	12	0.6	m	###	###	###	###	7	1.75
j	██████████	██████████	██████████	██████████	██████████	7	0.03	t	###	###	###	###	7	1.75
k	██████████	██████████	██████████	██████████	██████████	0	0	w	###	###	###	###	7	1.75
w	██████████	██████████	██████████	██████████	██████████	0	0	p	###	###	###	###	6	1.5
y	██████████	██████████	██████████	██████████	██████████	0	0	a	###	###	###	###	5	1.25
z	██████████	██████████	██████████	██████████	██████████	0	0	s	###	###	###	###	4	1.0
								u	/				1	0.25

Première constatation : le logogriphe contient les 26 lettres de notre alphabet plus le signe *f*, une sorte de *S* allongé qui ressemble à un «*f*» sans tiret. L'alphabet latin, lui, ne compte que 20 lettres dans sa variante archaïque. Rohrbach a différencié dans ses statistiques le I du J et le U du V, c'est pourquoi son alphabet latin compte deux lettres de plus.

Les cinq lettres latines les plus fréquentes (E, I, A, T, U) représentent 45 % d'un texte. Dans le logogriphe, qui compte 408 lettres, elles devraient donc apparaître environ 37 fois chacune. Or, le *n*, qui revient le plus souvent, n'y figure que 34 fois. Cela pourrait signifier qu'Euler a employé au moins deux représentations pour les lettres les plus fréquentes, ce qui met sur la piste d'un chiffre *homophonique* : une lettre peut être chiffrée par plusieurs symboles différents, appelés *homophones*. Par chance, comme il n'y a que six lettres et le signe *f* en supplément, cela suggère qu'il y a peu d'homophones : probablement sept (27-20), mais cela reste à confirmer.

Rohrbach examine alors des groupes de lettres qui apparaissent le plus fréquemment dans le texte [2] :

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
1	<i>pxqfw</i>	<i>lznjd</i>	<i>vynft</i>	<i>iddkq</i>	<u><i>xhlee</i></u>	<i>bfpzd</i>	<i>fgtlz</i>	<i>bccfb</i>	<i>kfodx</i>	<i>okfnjl</i>
2	<i>qxnfc</i>	<i>hejml</i>	<i>ckzch</i>	<i>rfwjj</i>	<i>fhxvz</i>	<i>jnbgy</i>	<i>xcdgi</i>	<i>xkoxj</i>	<u><i>mlnco</i></u>	<u><i>igdxvz</i></u>
3	<u><i>flmes</i></u>	<i>nfyjq</i>	<i>fangv</i>	<i>nylrc</i>	<i>xfonb</i>	<u><i>ffalr</i></u>	<i>kwsnb</i>	<i>fpjoi</i>	<i>zoxqk</i>	<i>nubrof</i>
4	<i>adgia</i>	<i>xwkcb</i>	<i>rbckl</i>	<i>ofrnj</i>	<i>wgnfz</i>	<i>fhgjf</i>	<i>cbcfv</i>	<i>qjtxe</i>	<i>evtbz</i>	<i>fyjsbz</i>
5	<i>h/mln</i>	<i>bgfsq</i>	<i>jwglñ</i>	<u><i>xvzfk</i></u>	<u><i>onbco</i></u>	<u><i>igdxv</i></u>	<u><i>rkfja</i></u>	<u><i>lzxtf</i></u>	<i>nilen</i>	<i>fgvcho</i>
6	<i>ofcfx</i>	<i>nnfgn</i>	<i>kbcjn</i>	<i>njynx</i>	<i>vplgn</i>	<i>bfzfo</i>	<i>xeejg</i>	<i>dxbcj</i>	<i>cnfdy</i>	<i>vdbhzl</i>
7	<i>nvyxm</i>	<i>bcblo</i>	<i>bbcyl</i>	<u><i>ekonb</i></u>	<u><i>ceiob</i></u>	<i>fplws</i>	<i>xzxfj</i>	<i>cndbh</i>	<i>rlzqx</i>	<u><i>sfonbc</i></u>
8	<i>oljff</i>	<i>yqfmj</i>	<u><i>eevhl</i></u>	<u><i>eexoi</i></u>	<i>exmgi</i>	<i>cfdnk</i>	<i>tvold</i>	<i>xnfbx</i>	<i>ofckt</i>	<i>vpærnv</i>

Il remarque que la suite *coigdxv* (aux lignes 2 et 5) est suivie une fois par *z* et l'autre par *r*. C'est aussi le cas pour la suite *ffal* (aux lignes 5 et 3). Il suppose donc que *r* et *z* sont des homophones. Cela semble être confirmé par le groupe de 5 lettres *dbhzl* (ligne 6, colonne j) comparé à *dbhrl* (ligne 7, colonnes h et i).

En procédant ainsi, il trouve les cinq paires d'homophones *j-f*, *k-x*, *w-t*, *y-g* et *z-r*.

Il peut maintenant réécrire le logogriphe en éliminant les homophones, et il souligne à nouveau les répétitions, qui sont plus nombreuses [2] :

<i>pxqft</i>	<i>lrnfd</i>	<i>vgnft</i>	<i>iddxq</i>	<u><i>xhlee</i></u>	<i>bfpzd</i>	<i>fgtlr</i>	<i>bccfb</i>	<i>xfodx</i>	<u><i>oxfnjl</i></u>
<i>qxnfc</i>	<i>hefml</i>	<i>cxrxh</i>	<i>rftfg</i>	<u><i>fhxvr</i></u>	<i>fnbgg</i>	<i>xcdgi</i>	<u><i>xxoxf</i></u>	<i>mlnco</i>	<u><i>igdxvr</i></u>
<u><i>flmes</i></u>	<i>nfgfq</i>	<i>fangv</i>	<i>nglrc</i>	<i>xfonb</i>	<u><i>ffalr</i></u>	<u><i>xtfnb</i></u>	<i>fpfoi</i>	<i>roxqx</i>	<i>nubrof</i>
<i>adgia</i>	<i>xtxcb</i>	<i>rbcxl</i>	<i>ofrnj</i>	<i>tgn/r</i>	<i>fhgff</i>	<i>cbcfv</i>	<i>qftxe</i>	<i>evtbr</i>	<i>fgfsbr</i>
<i>h/mln</i>	<i>bgfsq</i>	<i>ftglñ</i>	<u><i>xvrfx</i></u>	<u><i>onbco</i></u>	<u><i>igdxv</i></u>	<u><i>rxffa</i></u>	<u><i>lrxtf</i></u>	<i>nilen</i>	<i>fgvcho</i>
<i>ofcfx</i>	<u><i>nnfgn</i></u>	<u><i>xbcfñ</i></u>	<u><i>nfgnx</i></u>	<i>vplgn</i>	<i>bfrfo</i>	<i>xeejg</i>	<u><i>dxbcf</i></u>	<i>cnfdg</i>	<i>vdbhrl</i>
<i>nvyxm</i>	<i>bcblo</i>	<u><i>bbcyl</i></u>	<u><i>exonb</i></u>	<u><i>ceiob</i></u>	<i>fplts</i>	<i>xrxff</i>	<u><i>cndbh</i></u>	<u><i>rlrqx</i></u>	<u><i>sfonbc</i></u>
<i>oljff</i>	<i>gqfmj</i>	<u><i>eevhl</i></u>	<u><i>eexoi</i></u>	<i>exmgi</i>	<i>cfdnx</i>	<i>tvold</i>	<i>xnfbx</i>	<i>ofcxt</i>	<i>vpærnv</i>

Ensuite, Rohrbach examine les fréquences des *bigrammes* (groupes de deux lettres successives). Pour ce faire, il réalise le tableau statistique ci-après. Il ne compte pas uniquement les fréquences des lettres, mais note aussi la lettre qui la suit dans le logogriphe.

Par exemple, sur la première ligne du tableau, il note que le *f* est suivi du *g* 7 fois, du *f* 4 fois, du *c* 3 fois, etc. Le *f* apparaît en tout 53 fois, ce qui représente 12.99 % des lettres.

	abs.	%
<i>f g::: f:: c: t: a: m: n: p: o: d. b. h. r. e. x. l q v s f</i>	53	12.99
<i>x o::: f:: v:: t:: n:: q: r: h. e. b. e. m. d x l s f</i>	46	11.28
<i>n b::: f::: x:: f::: g: n. v. c d i u</i>	34	8.33
<i>b e::: f:: r:: g. h. x. b l o</i>	28	6.86
<i>g f:: n:: v: d: l: i: x. g q t f</i>	28	6.86
<i>c f::: b:: x:: o: n. c h d e g</i>	24	5.88
<i>r f::: x:: n: b. o. l. e h q</i>	24	5.88
<i>l r::: n:: e: o. c d g m f q</i>	22	5.39
<i>o x:: n:: i:: b. f. l. f. d</i>	22	5.39
<i>e e:: x: f. v. b i n f</i>	16	3.92
<i>v r: g. p. c d o n h t q</i>	16	3.92
<i>d x::: g: b. d f n v</i>	15	3.67
<i>f n: t. o. c. r d g m a s</i>	15	3.67
<i>t x. g. l. f. v. f i b b s</i>	14	3.43
<i>i g. r c d o a x l e</i>	10	2.45
<i>h r: l. x e g f</i>	9	2.20
<i>q f::: x:: f</i>	9	2.20
<i>m l: b e f g</i>	7	1.71
<i>p x: l. f</i>	6	1.47
<i>a l. d n x</i>	5	1.22
<i>s x b q f</i>	4	0.98
<i>u b</i>	1	0.24
<i>j —</i>		
<i>k —</i>		
<i>w —</i>		
<i>y —</i>		
<i>z —</i>		

En latin, la lettre Q est assez courante et vient toujours juste avant un U. Rohrbach cherche donc un bigramme dont la première lettre n'apparaît qu'en combinaison avec une certaine autre. Or, cela n'arrive qu'une seule fois : *u* suivi de *b*. C'est trop peu. Il conclut qu'Euler a probablement utilisé une seule lettre pour chiffrer « QU ».

Il n'y a que quatre lettres qui peuvent venir après QU : A, E, I et O. Toutes les quatre sont assez communes et plus fréquentes que Q. Les candidats sont donc : *q, p, a* et *s*.

Fort de ces constatations, Rohrbach finit par identifier que *p* = QU, *f* = E, *x* = I et *l* = A.

Un autre point marquant dans le tableau ci-dessus est le bigramme « *ee* » qui apparaît 4 fois. Il doit correspondre à un redoublement de consonnes dans le texte clair. Une lettre peu fréquente qui se redouble souvent en latin est le L. Pour en être sûr, il faut retrouver les occurrences de « *ee* » dans le logogriphe [2] :

<i>i all equi</i>	<i>e il l</i>	<i>ille</i>	<i>e e ll a lli</i>
1e,f <i>xhlee bfp xd</i>	4h,i <i>qftxe evtr</i>	6g <i>xeefg</i>	8b,c,d <i>gqfmf eevhl eexoi</i>

Ainsi donc, *ee* correspond bien à LL.

Dans la partie 8b,c,d, il est relativement aisé de deviner les lettres manquantes et l'on voit apparaître « de bello gallico » [2].

	<i>de b e lloga ll ico</i>
8b,c,d	<i>gqfmf eevhl eexoi</i>

Le reste est de la routine pour un cryptanalyste. À l'aide des lettres déjà découvertes, des mots et donc d'autres lettres peuvent être devinées [2] :

caesa rdeb e lloga ll ico li bro septi mocap itevi cesim oquinto
olffl gqfmf eeihl eexoi exmgi cfdnx tiold xnfba olcxt ip xrni
 ?

De proche en proche, Rohrbach détermine la table de chiffrement suivante :

Clair	A	B	C	D	E	F	G	H	I, J	L	M	N	O	P	QU	R	S	T	U, V	X
Chiffré	<i>l</i>	<i>m</i>	<i>o</i>	<i>q</i>	<i>j</i>	<i>s</i>	<i>h</i>	<i>u</i>	<i>k</i>	<i>e</i>	<i>t</i>	<i>r</i>	<i>i</i>	<i>d</i>	<i>p</i>	<i>g</i>	<i>c</i>	<i>n</i>	<i>b</i>	<i>a</i>
	<i>f</i>				<i>f</i>				<i>x</i>		<i>w</i>	<i>z</i>	<i>v</i>			<i>y</i>	<i>f?</i>			

On peut constater qu'Euler a utilisé des homophones pour les lettres claires A, E, I/J, M, N, O et R. **Speziali** fait remarquer dans son article que « le *f* du chiffre signifie tantôt E, tantôt S, ce qui veut dire que dans le manuscrit original, aujourd'hui introuvable, il y avait deux *f* de type différent. C'est probablement l'une des causes des difficultés qu'a présentées le décryptement de ce texte » [1]. La deuxième possibilité est qu'Euler s'est trompé lors de son chiffrement...

Le texte déchiffré est un extrait de « La Guerre des Gaules » de Jules César (livre VII, chapitre 25) :

Quidam ante portam oppidi Gallus, qui per manus sebi ac picis traditas glebas in ignem e regione turris proiciebat, scorpione ab latere dextro traiectus exanimatusque concidit. Hunc ex proximis unus iacentem transgressus eodem illo munere fungebatur; eadem ratione ictu scorpionis exanimato alteri successit tertius et tertio quartus, nec prius ille est a propugnatoribus vacuus relictus locus quam restincto aggere atque omni ex parte summotis hostibus finis est pugnandi factus.

Caesar, De bello gallico, libro septimo, capite vicesimo quinto

Devant la porte de la ville était un Gaulois, à qui l'on passait de main en main des boules de suif et de poix, qu'il lançait dans le feu du haut d'une tour. Un trait de scorpion lui perce le flanc droit ; il tombe mort. Un de ses plus proches voisins passe par-dessus le cadavre et remplit la même tâche ; il est atteint à son tour et tué de la même manière ; un troisième lui succède ; à celui-ci un quatrième ; et le poste n'est abandonné que lorsque le feu de la terrasse est éteint et que la retraite des ennemis partout repoussés a mis fin au combat.

César, La Guerre des Gaules, livre VII, chapitre 25

Notons pour finir que la méthode de décryptement de Speziali est différente, bien que basée elle aussi sur les fréquences d'apparition des lettres.

Lui s'est d'abord attaqué aux lettres redoublées afin de faire la distinction entre consonnes et voyelles. Les voici dans l'ordre, avec les deux lettres qui les encadrent : *iddk, leeb, bccf, xeev, boof, xnnf, jnnj, xeej, obbc, jeev* et *leex*. Puisque toutes les lettres qui encadrent les redoublements ne se redoublent pas elles-mêmes, il en tire que *i, k, l, f, x, v* et *j* sont des voyelles. Le *b* fait exception, mais comme il encadre trois redoublements et comme *o* et *c* se redoublent en tant que consonnes, il n'y a aucun risque à supposer que *b* est une voyelle.

Puis il porte son effort sur les lettres rares du cryptogramme, car elles correspondent probablement à des lettres rares du texte clair. Le *a* n'apparaît que 5 fois et précisément dans les groupes *fangv, jalrk, fadgiawkc, jalzx*. Il utilise les trigrammes *ang* et *adg* pour déterminer *a*. Après deux essais seulement, son choix se porte sur la lettre X. Dès lors, les possibilités se réduisent à une seule, *ang* = XTR, ce trigramme étant bien encadré par deux voyelles. La voyelle qui le précède est certainement *e*, donc *fang* = EXTR. Il pose ensuite *adg* = XPR, puis trouve que probablement *fadgiawkc* = EXPROXIMIS. Avec les lettres ainsi découvertes, il réussit à décrypter petit à petit tout le logogriphe.

Références

- [1] Speziali Pierre, « Le logogriphe d'Euler », *Stultifera navis*, Bull. Soc. suisse des bibliophiles, avril 1953, pp. 6-9
- [2] Rohrbach Hans, « The logogryph of Euler », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Band 262/263, 1973, pp. 392-399

Ces deux articles, ainsi que la lettre d'Euler à Goldbach de 1744, sont disponibles sur cette page web : www.apprendre-en-ligne.net/crypto/euler/

La loi de réciprocité quadratique

Alexandre Junod, Lycée Denis-de-Rougemont (Neuchâtel), alexandre.junod@rpn.ch

Véritable chef d’oeuvre de la théorie des nombres, la *loi de réciprocité quadratique* a été découverte indépendamment par Leonhard Euler en 1783 et Adrien-Marie Legendre en 1785. Carl Friedrich Gauss en donna une première démonstration complète en 1801 et on compte aujourd’hui plus de 200 preuves recensées sur la page internet <http://www.rzuser.uni-heidelberg.de/~hb3/rchrono.html>. Nous présentons ici une des preuves de Gotthold Eisenstein (1823–1852) qui nécessite peu de pré-requis.

1 Le lemme de Gauss et le petit théorème de Fermat

On considère un nombre premier $p \neq 2$, un entier q non divisible par p et un entier $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ avec $N = \frac{p-1}{2}$. Par division euclidienne, on peut trouver des nombres $a_k = \lfloor kq/p \rfloor$ et $r_k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ tels que $kq = a_k p + r_k$.

$$\begin{array}{c|c} kq & p \\ \hline \vdots & a_k \\ r_k & \end{array}$$

On pose alors $\hat{r}_k = r_k$ si $r_k \leq N$, $\hat{r}_k = r_k - p$ si $r_k > N$ et on note n le nombre de valeurs de k pour lesquelles $\hat{r}_k < 0$.

Effectuons le produit modulo p de tous les nombres $kq \equiv r_k$ (pour $k = 1, 2, \dots, N$) :

$$q^N N! \equiv \prod_{k=1}^N r_k \equiv \prod_{k=1}^N \hat{r}_k = (-1)^n \prod_{k=1}^N |\hat{r}_k|.$$

Les N nombres entiers $|\hat{r}_k|$ vérifient clairement $1 \leq |\hat{r}_k| \leq N$ et ils sont tous différents : si $\hat{r}_k = \hat{r}_s$, on aurait $r_k = r_s$, donc $(k-s)q = (a_k - a_s)p$, mais p ne divise ni q ni $|k-s| < N$, sauf si $k = s$. De même, si $\hat{r}_k = -\hat{r}_s$, on aurait $r_k + r_s = p$, donc $(k+s)q = (1 + a_s + a_k)p$, mais comme p ne divise ni q ni $k+s \in \{2, 3, \dots, p-1\}$, la supposition initiale est absurde. Ainsi l’ensemble $\{|\hat{r}_k| : 1 \leq k \leq N\}$ est simplement $\{1, 2, \dots, N\}$ et la congruence ci-dessus devient $q^N N! \equiv (-1)^n N!$. Comme p ne divise pas $N!$, on en déduit que $q^N \equiv (-1)^n \pmod{p}$. Cette congruence constitue le *lemme de Gauss* et le *petit théorème de Fermat* en découle immédiatement : p divise $(q^N - 1)(q^N + 1) = q^{p-1} - 1$, autrement dit $q^{p-1} \equiv 1$ modulo p (lorsque, rappelons-le, q n’est pas divisible par le nombre premier p).

Lemme d’Eisenstein. Supposons que l’entier q soit impair et effectuons la somme des nombres kq :

$$q \sum_{k=1}^N k = p \sum_{k=1}^N a_k + \sum_{k=1}^N r_k = p \sum_{k=1}^N a_k + \sum_{k=1}^N \hat{r}_k + np.$$

Modulo 2, on a $p \equiv q \equiv 1 \equiv -1$, donc on peut écrire $\sum k \equiv \sum a_k + \sum |\hat{r}_k| - n$. Comme les ensembles $\{|\hat{r}_k| : 1 \leq k \leq N\}$ et $\{1, 2, \dots, N\}$ coïncident, on a $n \equiv \sum a_k \pmod{2}$, ce qui permet de

réécrire le lemme de Gauss sous la forme $q^N \equiv (-1)^S \pmod{p}$ avec $S = \sum_{k=1}^N a_k = \sum_{k=1}^N \left\lfloor \frac{kq}{p} \right\rfloor$.

2 Résidus quadratiques

Modulo p , les nombres $1^2, 2^2, \dots, N^2$ (avec $N = \frac{p-1}{2}$) représentent tous les carrés non nuls (car $(p-a)^2 \equiv a^2$) et sont tous différents : si $a^2 \equiv b^2 \pmod{p}$, alors p divise $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ mais ne pouvant diviser $a+b \in \{2, 3, \dots, 2N\}$, il divise $|a-b| \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, donc $a = b$. Ces N nombres distincts $1^2, 2^2, \dots, N^2$ sont exactement les racines (modulo p) du polynôme $P(x) = x^N - 1$ de degré N . Toujours par le petit théorème de Fermat, les nombres qui ne sont pas congrus à des carrés d'entiers annulent le polynôme $x^{p-1} - 1 = (x^N - 1)(x^N + 1)$ mais comme ils n'annulent pas $x^N - 1$ (dont les racines non nulles viennent d'être recensées), ils annulent $x^N + 1$. Pour résumer, q^N est congru à 1 ou à -1 selon que q est congru ou non à un carré. Legendre a défini le symbole

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \begin{cases} +1 & \text{s'il existe } x \text{ tel que } p \text{ divise } q - x^2 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors $\left(\frac{q}{p}\right) \equiv q^N \pmod{p}$ et on peut remarquer que $\left(\frac{q+kp}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$ pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$.

De plus, si q est impair, alors $\left(\frac{q}{p}\right) \equiv q^N \equiv (-1)^S \pmod{p}$, donc $\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^S$ avec $S = \sum_{k=1}^N \left\lfloor \frac{kq}{p} \right\rfloor$.

Exemples

1) $\left(\frac{-1}{p}\right) = \left(\frac{2p-1}{p}\right)$ dépend de la parité de la somme

$$S = \sum_{k=1}^N \left\lfloor \frac{k(2p-1)}{p} \right\rfloor = \sum_{k=1}^N \left\lfloor 2k - \frac{k}{p} \right\rfloor = \sum_{k=1}^N (2k-1) = N^2 = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2.$$

On a les équivalences $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$, S est paire, $\frac{p-1}{2} \in 2\mathbb{N}$, $p \in (4\mathbb{N}+1)$.

2) $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{p+2}{p}\right)$ dépend de la parité de la somme

$$S = \sum_{k=1}^N \left\lfloor \frac{k(p+2)}{p} \right\rfloor = \sum_{k=1}^N \left\lfloor k + \frac{2k}{p} \right\rfloor = \sum_{k=1}^N k = \frac{N(N+1)}{2}.$$

On a les équivalences $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$, S est paire, $N \in 4\mathbb{N}$ ou $N+1 \in 4\mathbb{N}$, $\frac{p-1}{2} \in 4\mathbb{N}$ ou $\frac{p+1}{2} \in 4\mathbb{N}$, $p \in (8\mathbb{N}+1)$ ou $p \in (8\mathbb{N}-1)$.

3) Le symbole de Legendre est *multiplicatif* : $\left(\frac{m_1 m_2}{p}\right) \equiv (m_1 m_2)^N = m_1^N m_2^N \equiv \left(\frac{m_1}{p}\right) \left(\frac{m_2}{p}\right)$ modulo p , si bien que les deux extrémités, qui valent 1 ou -1 , sont égales.

En particulier, $\left(\frac{-2}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) \left(\frac{2}{p}\right)$ vaut 1 uniquement dans les cas suivants.

$$\cdot \left(\frac{-1}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right) = 1, \text{ c'est-à-dire } p \in (4\mathbb{N}+1) \cap ((8\mathbb{N}+1) \cup (8\mathbb{N}+7)) = (8\mathbb{N}+1)$$

$$\cdot \left(\frac{-1}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right) = -1, \text{ c'est-à-dire } p \in (4\mathbb{N}+3) \cap ((8\mathbb{N}+3) \cup (8\mathbb{N}+5)) = (8\mathbb{N}+3)$$

On peut également déterminer $\left(\frac{-2}{p}\right) = \left(\frac{p-2}{p}\right) = (-1)^{(N-1)N/2}$ comme dans le deuxième exemple.

3 La loi de réciprocité quadratique

Si $q \neq 2$ est aussi un nombre premier (différent de p), on peut échanger les rôles de p et q . On a alors

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^S \text{ avec } S = \sum_{k=1}^{(p-1)/2} \left\lfloor \frac{kq}{p} \right\rfloor \quad \text{et} \quad \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^T \text{ avec } T = \sum_{k=1}^{(q-1)/2} \left\lfloor \frac{kp}{q} \right\rfloor.$$

On voit ainsi que $\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{S+T}$ ne dépend que de la parité de $S + T$.

L'ensemble $E = \left\{1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}\right\} \times \left\{1, 2, \dots, \frac{q-1}{2}\right\}$ contient $\frac{(p-1)(q-1)}{4}$ éléments que l'on peut répartir en deux catégories : le sous-ensemble E_1 qui contient les éléments $(x; y)$ vérifiant $y < \frac{q}{p}x$ et le sous ensemble E_2 qui contient ceux vérifiant $y > \frac{q}{p}x$, c'est-à-dire $x < \frac{p}{q}y$ (on ne peut pas avoir $y = \frac{q}{p}x$ car la fraction $\frac{q}{p}$ est irréductible). Le nombre d'éléments de ces sous-ensembles est respectivement

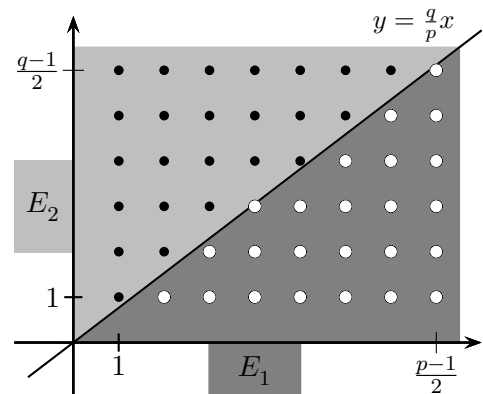
$$\sum_{(x;y) \in E_1} 1 = \sum_{x=1}^{(p-1)/2} \sum_{y < \frac{q}{p}x} 1 = \sum_{x=1}^{(p-1)/2} \left\lfloor \frac{qx}{p} \right\rfloor = S \quad \text{et} \quad \sum_{(x;y) \in E_2} 1 = \sum_{y=1}^{(q-1)/2} \sum_{x < \frac{p}{q}y} 1 = \sum_{y=1}^{(q-1)/2} \left\lfloor \frac{py}{q} \right\rfloor = T.$$

Comme E est réunion disjointe de E_1 et E_2 , on a

$$S + T = \frac{(p-1)(q-1)}{4}.$$

Cette relation peut aussi être expliquée par l'illustration ci-contre (avec $p = 17$ et $q = 13$) et démontre la *loi de réciprocité quadratique* :

$$\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{(p-1)(q-1)/4}.$$



Pour être plus explicite, on peut envisager deux situations.

- Si les nombres p et q sont tous les deux congrus à 3 modulo 4, alors $\frac{(p-1)(q-1)}{4}$ est impair, S et T ont des parités différentes, et donc $\left(\frac{p}{q}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right)$.
- Si l'un (au moins) des nombres p et q est congru à 1 modulo 4, alors $\frac{(p-1)(q-1)}{4}$ est pair, S et T ont la même parité, et donc $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$.

Exemple. En utilisant la réduction modulaire (R), la loi de réciprocité quadratique (L) et la multiplicativité du symbole de Legendre (M), on a

$$\left(\frac{23}{13}\right) \stackrel{(R)}{=} \left(\frac{10}{13}\right) \stackrel{(M)}{=} \left(\frac{2}{13}\right) \left(\frac{5}{13}\right) \stackrel{(L)}{=} \left(\frac{2}{13}\right) \left(\frac{13}{5}\right) \stackrel{(R)}{=} \left(\frac{2}{13}\right) \left(\frac{3}{5}\right) \stackrel{(L)}{=} \left(\frac{2}{13}\right) \left(\frac{5}{3}\right) \stackrel{(R)}{=} \left(\frac{2}{13}\right) \left(\frac{2}{3}\right).$$

Comme 3 et 13 ne sont pas congrus à ± 1 modulo 8, on a $\left(\frac{2}{13}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = -1$, et donc $\left(\frac{23}{13}\right) = 1$. Ainsi, il existe un entier x tel que $x^2 - 23$ est divisible par 13 (en fait $x = 6$ convient).

GÉOMÉTRIES D'HIER ET D'AUJOURD'HUI

Inégalités isopérimétriques et géométrie projective

Dates	du 14 au 17 septembre 2021
Lieu	Hôtel Suisse, Champéry
Renseignements	http://www.vsmmp.ch/crm/accueil/
Inscription	Cours publié par la SSPES sur www.webpalette.ch

Le colloque annuel de la CRM sera consacré cette année à des sujets de géométrie « modernes » et d'autres un peu « plus anciens ». Le programme détaillé sera publié prochainement sur le site de la CRM. Les conférences porteront sur :

Inégalités isopérimétriques, Bruno Colbois (Université de Neuchâtel) et Peter Buser (EPFL)

Trouver le rectangle de périmètre prescrit qui maximise son aire est un exercice classique. Mais comment s'y prendre lorsqu'on remplace le rectangle par un polygone à n côtés ou par une courbe de nature quelconque ? Des questions de ce genre s'appellent des problèmes isopérimétriques et seront traitées dans un premier temps. L'exposé se poursuivra en présentant deux sujets, stabilité et multi-domaines, faisant l'objet de recherches actuelles.

Isopérimétrie dans les graphes, Alain Valette (Université de Neuchâtel)

Le problème du calcul de la constante isopérimétrique d'un graphe (SPARSEST CUT) est un problème NP-complet, donc a priori difficile, pour lequel il est cependant possible de trouver des approximations dans P, c'est-à-dire calculables en temps polynomial. Après une introduction à P vs NP, l'exposé portera sur le problème SPARSEST CUT et une de ses approximations.

Le calcul des variations au travers d'exemples simples, Félix Schlenk (Université de Neuchâtel)

Quatre problèmes du calcul des variations seront résolus en observant qu'ils appartiennent tous au même problème de géométrie à 1 paramètre (chemin le plus court entre deux points dans le plan, géodésique, brachistochrone, surface de révolution d'aire minimale entre deux cercles parallèles).

Histoire de la géométrie projective, Jean-Daniel Voelke (Gymnase Auguste Piccard, Lausanne) et Klaus Volkert (Université de Wuppertal)

La géométrie projective est l'une des grandes théories mathématiques du 19^e siècle. Elle constitue le cadre naturel pour étudier les coniques. Le cours se propose de retracer quelques étapes de l'histoire de cette discipline en partant de la perspective pour arriver à son axiomatisation à la fin du 19^e siècle en passant par sa naissance en France et son étude en Allemagne.

Prix du cours CHF 350.- (y compris une année d'inscription à la SSPMP pour les participant-e-s qui ne sont pas encore membres de l'association)

Délai d'inscription 15 juillet 2021

Chaque participant-e est responsable de sa réservation à l'hôtel.

Prix du logement (avec petit-déjeuner et taxe de séjour)

Hôtel Suisse de CHF 93.- à 113.- /personne /jour

Centre Palladium de CHF 53.- à 88.- /personne /jour

Repas CHF 23.- /personne /repas de midi à l'Hôtel Suisse

Organisateurs : Damien Dobler et Jean-Marie Urfer

Ja – Oui – Sì

Ich möchte Mitglied des Vereins Schweizerischer Mathematikund Physiklehrkräfte (VSMP) sowie des Vereins Schweizerischer Gymnasiallehrerinnen und Gymnasiallehrer (VSG) werden.

J'aimerais devenir membre de la Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique (SSPMP) et de la Société Suisse des Professeurs de l'Enseignement Secondaire (SSPES).

Desidero diventare membro della Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica (SSIMF) e della Società Svizzera degli Insegnanti delle Scuole Secondarie (SSISS).

Beitrag/Montant/Quota: Fr. 140 (VSG-SSPES-SSISS) + Fr. 50 (SSIMF-SSPMP-VSMP)

Frau/Mme/Sig.ra Herr/M./Sig. Prof. Dr.

Name/Nom/Cognome:

Vorname/Prénom/Nome:

Adresse/Indirizzo:

PLZ Ort/NP Ville/CAP Luogo:

(Land/Pays/Paese):

E-Mail:

Tel.:

Geburtsdatum/Date de Naissance/

Data di nascita:

Sprache/Langue/Lingua: D F

Schule/École/Scuola:

Kanton/Canton/Cantone:

Kategorie/Catégorie/Categoria: aktiv/actif/attivo passiv/passif/passivo

StudentIn/Étudiant(e)/Studente/ssa.

Mitglied der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft/Membre de la Société Suisse de Physique/Membro della Società Svizzera di Fisica

Mitglied der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft/Membre de la Société Mathématique Suisse/Membro della Società Matematica Svizzera

Einsenden an/envoyer à/inviare a:

VSG – SSPES – SSISS, Sekretariat, z. H. Doris Lazzeri, 3000 Bern

www.vsg-sspes.ch

Impressum

Herausgeber — *Éditeur*
VSMP – SSPMP – SSIMF

Korrespondenz — *Correspondance*

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Werner-Kälin-Strasse 1 Tel. 041 210 25 58
8840 Einsiedeln

Layout — *Mise en page*

Samuel Byland samuel.byland@vsmp.ch
Weinbergstrasse 48b Tel. 079 728 63 97
5000 Aarau

Inserateverwaltung — *Publicité*

Hansjürg Stocker hjstocker@bluewin.ch
Friedheimstrasse 11 Tel. 044 780 19 37
8820 Wädenswil

Bestimmungen für Inserate und Beilagen

— *Tarifs pour les annonces et les annexes*

Inserate:

ganzseitig Fr. 500.–
halbseitig Fr. 300.–

Beilagen:

bis 20 g Fr. 500.–
über 20 g nach Vereinbarung

Adressänderungen — *Changement d'adresse*

VSMP Mitglieder — Membres de la SSPMP:
VSG – SSPES – SSISS
Sekretariat (Frau Doris Lazzeri)
Monbijoustrasse 36
3011 Bern
Tel. 031 382 52 33
information@vsg-sspes.ch

übrige Abonnenten — autres abonnés:

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Werner-Kälinstrasse 1 Tel. 041 210 25 58
8840 Einsiedeln

Auflage — *Tirage*

800 Exemplare
erscheint dreimal jährlich

Präsident VSMP — SSPMP — SSIMF

Arno Gropengiesser groppi@bluewin.ch
Via Domenico Galli 44
6600 Locarno-Solduno Tel. 091 751 14 47

Deutschscheizerische Mathematikkommission

Josef Züger praesident@dmk.vsmf.ch
Via Salens Tel. 081 641 10 94
7402 Bonaduz

Deutschscheizerische Physikkommission

Christian Stulz christian.stulz@gymburgdorf.ch
Gymnasium Burgdorf Tel. 031 638 03 03
Pestalozzistrasse 17
3400 Burgdorf

Commission Romande de Mathématique

Tatiana Mantuano tatiana.mantuano@gfbienne.ch
Grand'Rue 16 Tél. 032 544 47 53
2075 Wavre

Commission Romande de Physique

Yves Oestreicher yves.oestreicher@edu.ge.ch
Malvand 13 Tél. 079 796 69 95
1292 Chambéry

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

Luca Rovelli lucarovelli@ticino.com
Via Pedmunt 10 Tel. 091 825 76 69
6513 Monte Carasso

Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)

— *Délais de rédaction (de parution)*

Nr. 147 31.07.2021 (Ende September)
Nr. 148 30.11.2021 (Ende Januar)
Nr. 149 31.03.2022 (Ende Mai)

Druck und Versand — *Imprimerie*

Niedermann Druck AG
Letzistrasse 37
9015 St. Gallen
www.niedermanndruck.ch

Internet-Adressen — *Adresses Internet*

www.vsmf.ch — www.sspmp.ch — www.ssimf.ch



V S M P
S S P M P
S S I M F

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e di Fisica